

1. Hiukkasta (massa m) ympyräradalla kuvaa Schrödingerin yhtälö

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \frac{d^2\psi}{d\theta^2} = E\psi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

,missä I = pyörimisliikkeeseen liittyvä hitausmomentti ja kulma θ kuvaa hiukkasen paikkaa radalla. Osoita, että aaltofunktio $\psi = Ae^{im\theta}$ on Schrödingerin yhtälön ratkaisu. Osoita, että aaltofunktio toteuttaa renkaasta aiheutuvan syklisen reunaehdon $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$. Mikä on energian ominaisarvo? Normita lopuksi aaltofunktio.

2. a) Klassisen mekaniikan mukaan pyörimismäärävektorin z-komponentti saadaan liikemäärän x- ja y-komponenteista seuraavasti: $l_z = xp_y - yp_x$

Muodosta lauseke (suorakulmaisessa koordinaatistossa) kvanttimekaaniselle operaattorille \hat{l}_z

b) 2-ulotteisen pyörimisen (hiukkanen renkaan kehällä) tapauksessa \hat{l}_z esitetään yleensä suorakulmaisten koordinaattien asemasta kulmamuuttujan ϕ avulla: $\hat{l}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$. Osoita, että

funktio

$$\psi_{m_l} = \cos m_l \phi + i \sin m_l \phi \text{ on } \hat{l}_z \text{:n ominaisfunktio.}$$

c) Muodosta tilan ψ_{m_l} todennäköisyystiheyden lauseke. Mitä päätelmiä voit tehdä hiukkasen esiintymistodennäköisyydestä renkaan eri osissa ?

3. Pyörimismäärävektorin neliötä vastaava kvanttimekaaninen operaattori on muotoa

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2. \text{ Osoita, että kommutaattori } [\hat{l}^2, \hat{l}_z] = [\hat{l}_x^2, \hat{l}_z] + [\hat{l}_y^2, \hat{l}_z] + [\hat{l}_z^2, \hat{l}_z] = 0$$

4. Osoita, että vetyatomin 1s ja 2s atomiorbitaalit ovat keskenään ortogonaalisia. Voit

tarvita integraalia: $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

5. Funktiot luokitellaan niiden symmetrian mukaan parillisiin (even) ja parittomiin (odd) funktioihin seuraavasti: parillinen $f(x) = f(-x)$, pariton $f(x) = -f(-x)$. Hermiten polynomit ovat joko parillisia tai parittomia riippuen kvanttiluvun v arvosta. Tarkastele Hermiten polynomien H_0 , H_1 , H_2 ja H_3 parillisuutta. Voiko havaintojesi pohjalta päätellä jotain Hermiten polynomien ortogonaalisuudesta?