

1. Tarkastele seuraavia aaltofunktioita: $\psi = e^{ikx}$, $\psi = e^{-ikx}$, $\psi = \cos kx$, $\psi = \sin kx$
Mitkä näistä ovat liikemääräoperaattorin ja/tai kineettisen energian operaattorin ominaisfunktioita ja mitä arvoja liikemäärä voi saada ?

2. Kvanttimekaanisella superpositiolla tarkoitetaan tilannetta, jossa aaltofunktio koostuu joukosta jonkun operaattorin ominaisfunktioita. Kyseessä voivat olla esim. liikemääräoperaattorin, kokonaisenergiaoperaattorin tai pyörimismääräoperaattorin ominaisfunktiot. Tarkastellaan seuraavaa superpositiota:

$$\psi = \frac{2}{3}e^{ikx} + \frac{2}{3}e^{-ikx} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}e^{3ikx} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}e^{-3ikx}$$

- kuvaako ψ mielestäsi vapaasti etenevää aaltoa vai ns. seisovaa aaltoa?
- Onko ψ liikemääräoperaattorin ominaisfunktio ?
- Ovatko ψ :n kantana olevat kompleksiset eksponenttifunktiot liikemääräoperaattorin ominaisfunktioita ?
- Onko mahdollista ilman mittauksia päätellä mikä ψ :n kuvaaman hiukkasen liikemäärä on ?
- Jos tekisimme mittauksen ψ :n kuvaaman hiukkasen liikemäärästä, millaisia arvoja havaitsisimme ? Onko ψ :ssa esiintyvillä kertoimilla mahdollisesti jotain tekemistä havaintojen kanssa ?

3. Porfyriini molekyyli (etsi rakenne esim. internetistä) on tasomainen ja sen π -elektronitiloja voidaan yksinkertaistaa käyttämällä ”hiukkanen 2-ulotteisessa potentiaalilaatikossa” -mallia. π -elektronit ovat vangittuina neliömäiseen tasoon, jonka sivun pituus on molekyylin pituus 1000 pm. π -elektronien lukumäärä molekyyliässä on 26. Muodosta tarvittava määrä energiatioja ja sijoita π -elektronit niille (2 el/tila). Huomioi se, että useat tiloista ovat kahdesti degeneroituneita. Laske lopuksi energiaero ylimmän miehittyneen tilan ja ensimmäisen ei-miehittyneen tilan välille. Mitä aallonpituutta laskemasi aallonpituus vastaa ? Hae internetistä tietoa porfyriinin absorptioon kokeellisesti mitatusta aallonpituudesta.

4. Varianssi $\sigma_E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ kuvaa energia-arvojen jakaumaa tarkasteltavassa systeemissä.

Osoita, että hiukkaselle laatikossa $\sigma_E^2 = 0$ eli energia voi saada vain diskreettejä arvoja E_n eikä energijakaumaa ole. Hiukkaselle 1-ulotteisessa potentiaalilaatikossa liittyy normitettu

aaltofunktio $\psi_n(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin \frac{n\pi x}{a}$ $0 \leq x \leq a$ Tehtävän ratkaisussa tarvitset Hamiltonin

(kokonaisenergia) operaattoria $\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$ ja energian ominaisarvoja $E_n = n^2 \hbar^2 / 8ma^2$

5. Laske odotusarvot $\langle p_x \rangle$ ja $\langle p_x^2 \rangle$ hiukkaselle 1-ulotteisessa potentiaalilaatikossa tilalla $n=1$.

