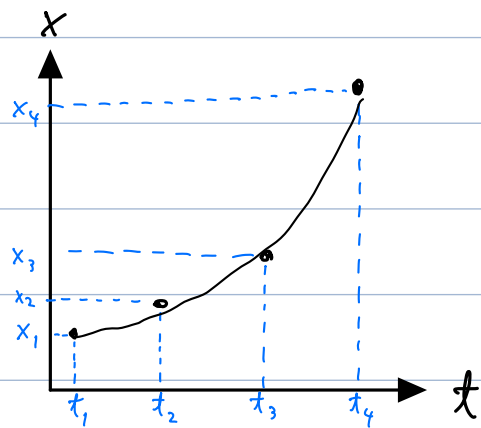


# 1. Yksiuulotteinen liike



Mitattu paikat  
 $x_i$  ajan hetkellä  $t_i$

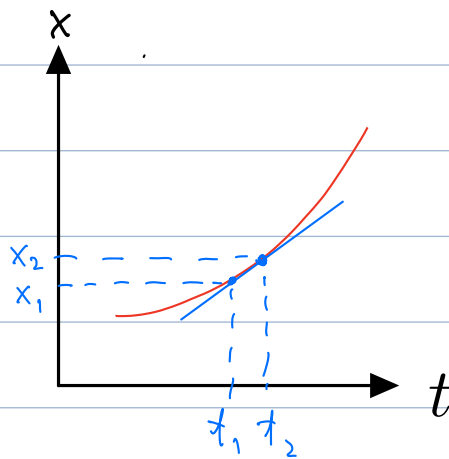
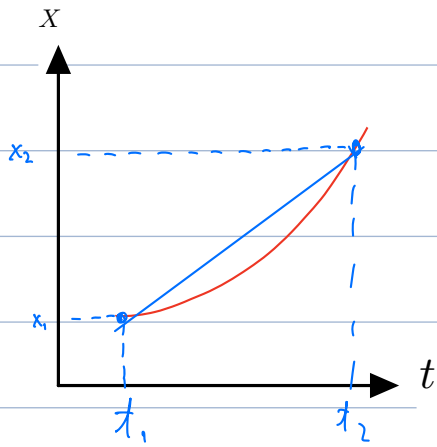
Keskinopeus

$$V_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_4 - x_1}{t_4 - t_1}$$

Kuljettu matka

$$x = V_{\text{avg}} \cdot \Delta t$$

Hetkeellinen nopeus:



Nopeus =  $(x, t)$  kuvaajan tangentin kulmakerroin  
Eli paikan muutosnopeus

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

Vastaavasti kiihtyvyys on nopeuden muutosnopeus

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} = x''(t)$$

Nopeus: paikan derivaatta

Kiihtyvyys: nopeuden derivaatta

Kääntäen:

Paikka: nopeuden integraali

Nopeus: kiihtyvyyden integraali

Esimerkki 1:

$$x(t) = 2t^4 - t^2 + 1 \quad [m] \quad (T/m)$$

$$v(t) = 8t^3 - 2t \quad [m/s]$$

$$a(t) = 24t^2 - 2 \quad [m/s^2]$$

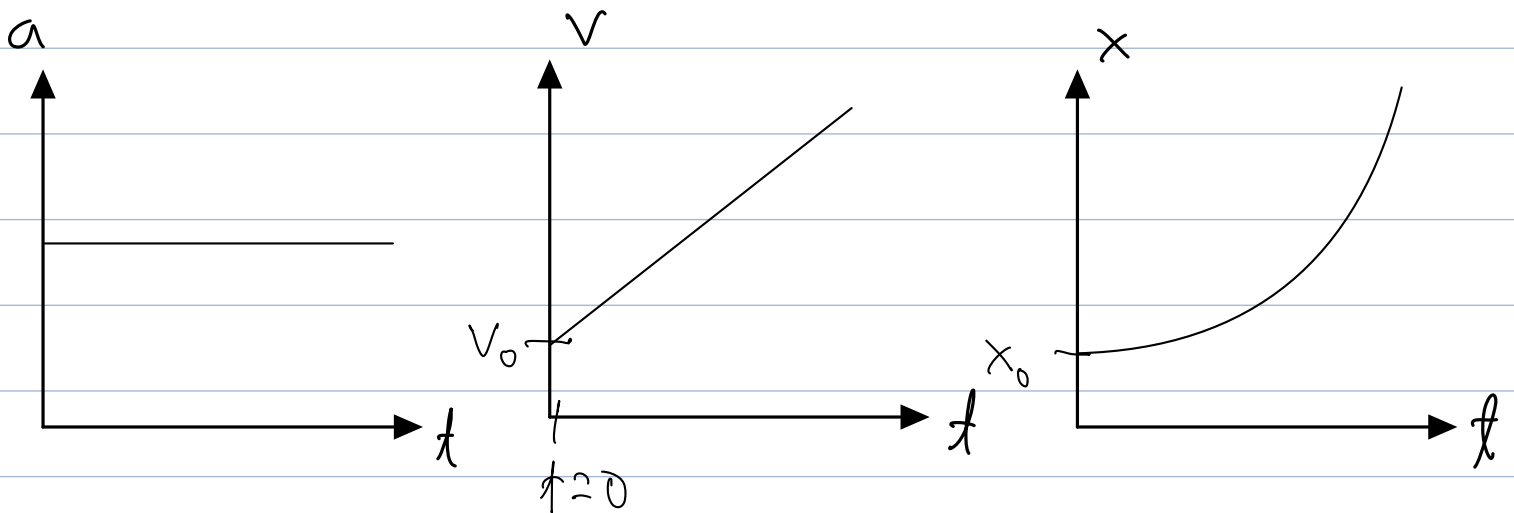
Esimerkki 2: tasainen kiihtyvyys

$$a(t) = a \quad (\text{vakio})$$

int. vakio  
 $v_0 = v(t=0)$

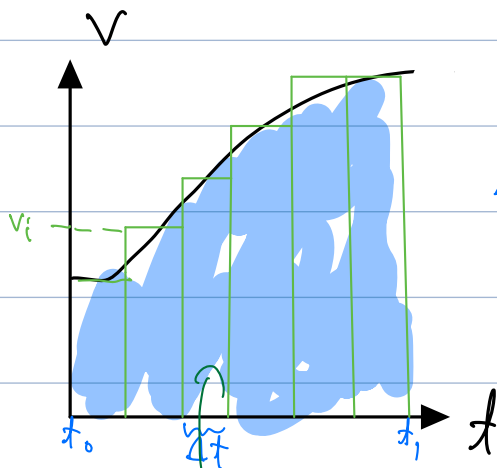
$$v(t) = \int a dt = a \cdot t + v_0$$

$$x(t) = \int v dt = \int (a \cdot t + v_0) dt$$
$$= \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$



Huom: integraali = käyrän rajaama

# pinta-ala.



$$\Delta X = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N v_i \Delta t = \int_{t_0}^{t_1} v dt$$

pinta-ala  $v_i \Delta t_i$  (oletetaan  $\Delta t_i = \Delta t$ )

Huom: tasaisesti kiihtyvää  
liikettä määrättyinä integraalina:  
(ei luenolla)

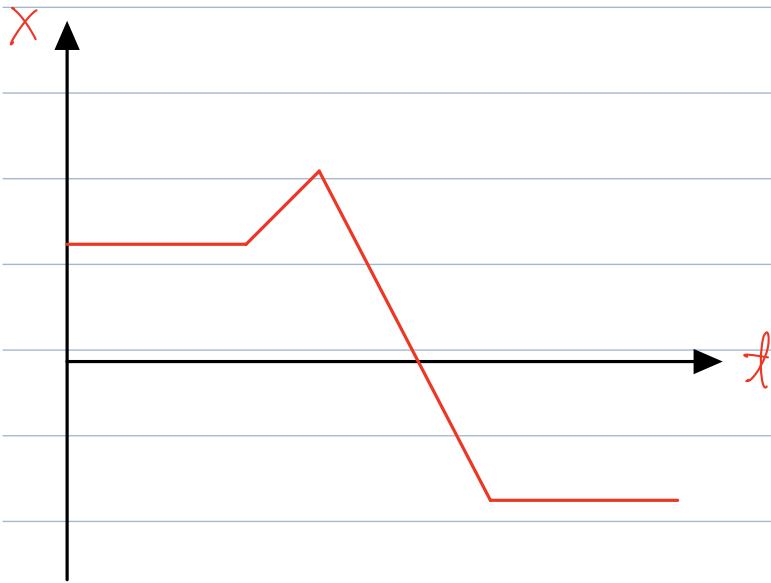
$$a(t) = a$$
$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t \underbrace{a(t)}_a dt = v(t_0) + a(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$$
$$= x_0 + \int_{t_0}^t v(t_0) dt + \int_{t_0}^t a(t - t_0) dt$$

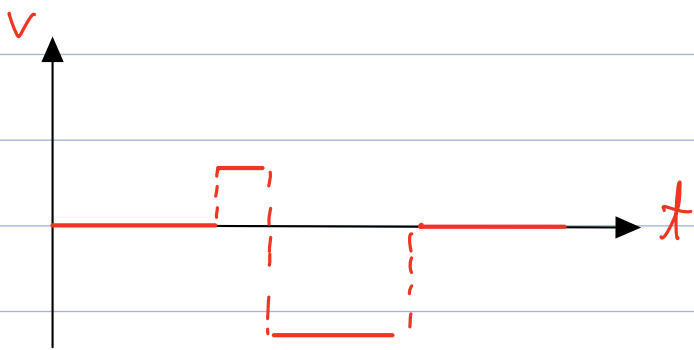
↑ vakio

$$= \dots = \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0$$

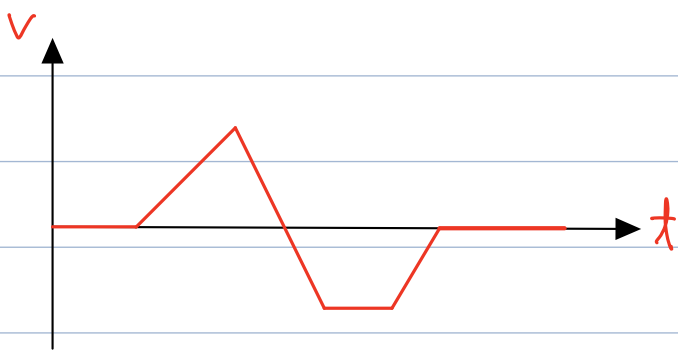
# Esimerkki 3: Kinematiikan kuvaajat



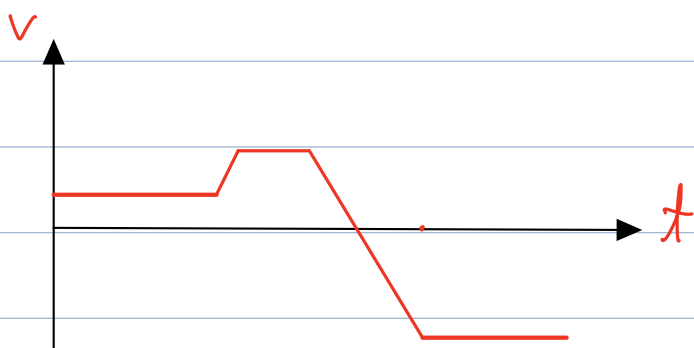
Mikä on oikea  $v, t$  kuvaaja?



(1)



(2)



(3)

## G ravitaatio

Esimerkki: putoamis-  
liikkeestä

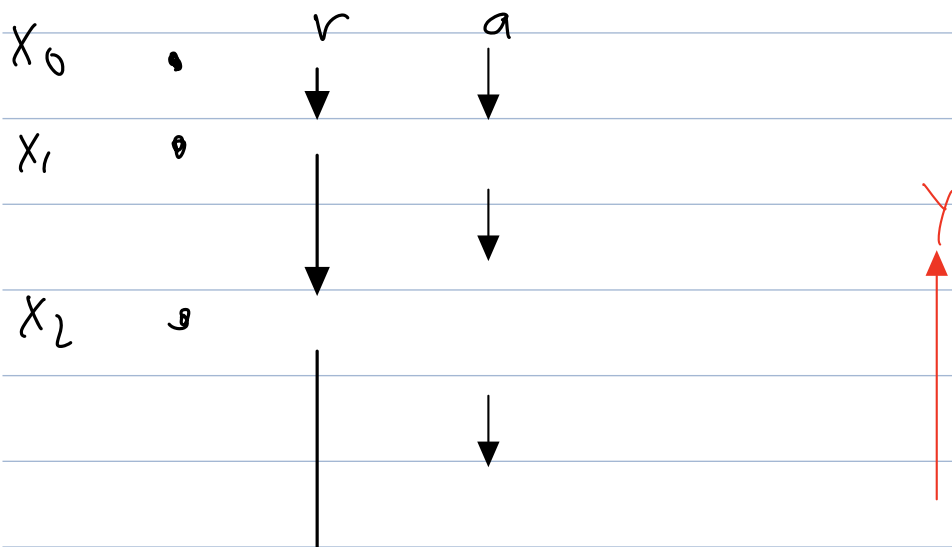
Tasainen kiihtyvyys  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$  (alas)

Kappale heitetään talon katoilta  
korkeudelta  $h$ .

Millä nopeudella se osuu maahan?

Liikediagrammi:

(sama aikaväli)

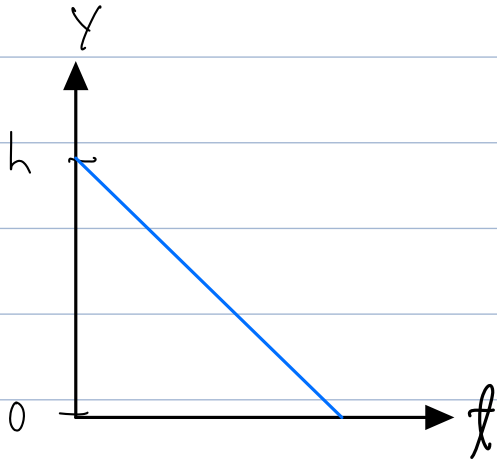


$x_3$  ↓

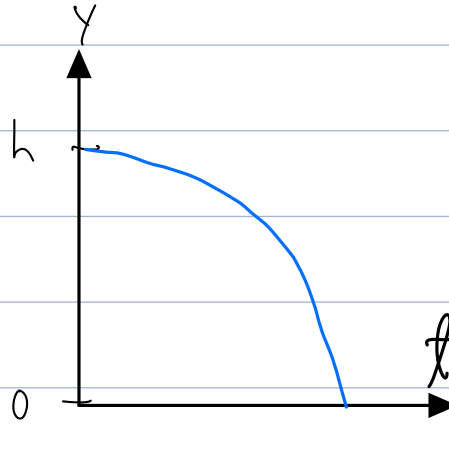
$$a = -g$$

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

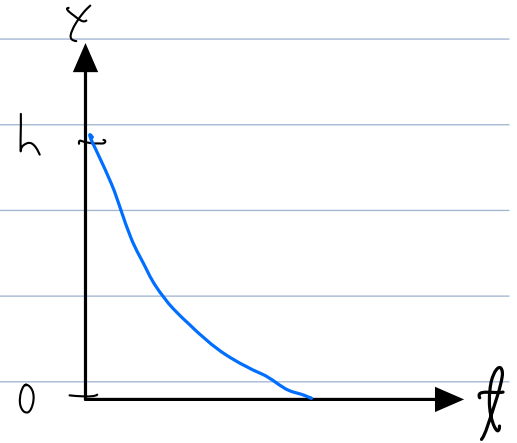
Kappaleen paikka ajan funktiona?



(a)



(b)



(c)

Laskuesimerkki:

Jos alkunopeus on  $v_0$ , niin millä nopeudella  $v_1$  kappale putoaa maahan korkeudelta  $h$ ?

$$v_0 = 10 \text{ m/s} \quad h = 10 \text{ m}$$

Edellä johdimme

$$y = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + h$$

$$v_1 = ?$$

$$t = ?$$

$$y = 0$$

$$a = -g$$

Oletus: ei huomioida ilmanvastusta.

eika painovoiman muuttamista etäisyyden muuttuessa..

$$v_1 = v_0 + at \Rightarrow$$

$$t = \frac{v_1 - v_0}{a}$$

$$0 = \frac{1}{2}(-g) \left( \frac{v_1 - v_0}{-g} \right)^2 + v_0 \frac{v_1 - v_0}{-g} + h$$

$$= -\frac{1}{2g} (v_1^2 + v_0^2 - 2v_1v_0) + \frac{v_0v_1 - v_0^2}{-g} + h$$

$$= -\frac{1}{g} \left( \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} - v_0^2 \right) + h$$

$$v_1^2 = v_0^2 + 2gh$$

$$v_0 = 10 \text{ m/s}$$

$$h = 10 \text{ m}$$

$$v_1 = \sqrt{(10 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}}$$
$$= 14.0428 \dots \text{ m/s} \approx 14 \text{ m/s}$$

Mistä näemme että tulos on järkevä? Kirjoita lentoseinälle!

## 2. Liike useammassa

... ja ...



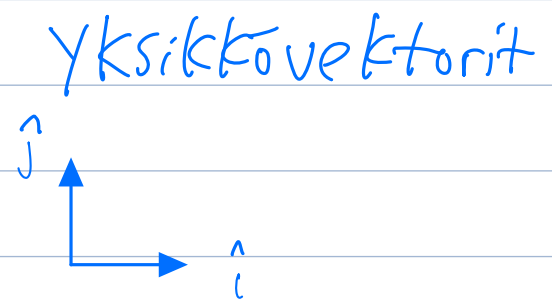
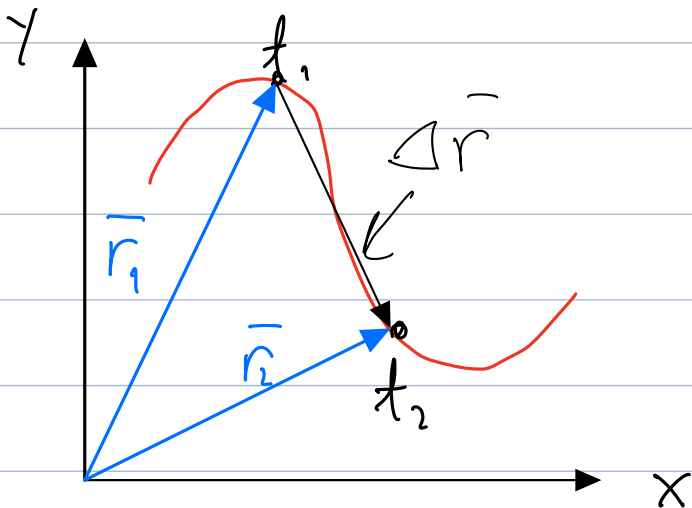
010770V00alssa

Useammassa ulottuvuudessa esim.  
paikan kuvaamiseen ei riitä yksi  
luku kuten yllä, tarvitaan  
vektori  $\vec{r}$  (tai  $\vec{r}$  tai  $\mathbf{r}$ )

Kertaa vektorit

Matikkapakista

<https://r.jyu.fi/DGQ>



$$\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j}$$

yksikkö esim.  $\hat{m}$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

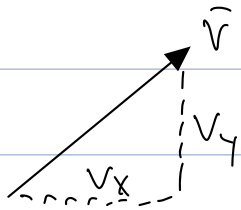
$$\Delta y = y_2 - y_1$$

Siirtymä  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$   
 $= \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j}$

Keskinopeus  $\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j}$   
 $= \left( \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)$

Hetkellinen nopeus

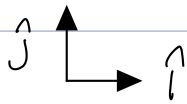
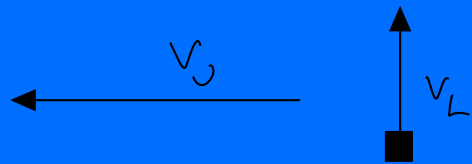
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$



Vauhti  $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Vastaa vasti kiihtyvyys  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

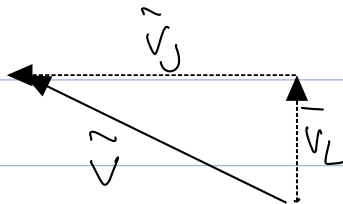
Esimerkki: joki



Laiava kiihdyttää joessa suoraan  
eteenpäin nopeudella  $v_L = 2t$  [m/s]  
Joki virtaa vasemmalle nopeudella  
 $v_j = 3$  [m/s] ( $t$  sekuntina)

Laiivan nopeus

$$\vec{v} = \vec{v}_L + \vec{v}_j = 2t \vec{j} - 3 \vec{i} \\ = (-3, 2t) \quad [\text{m/s}]$$

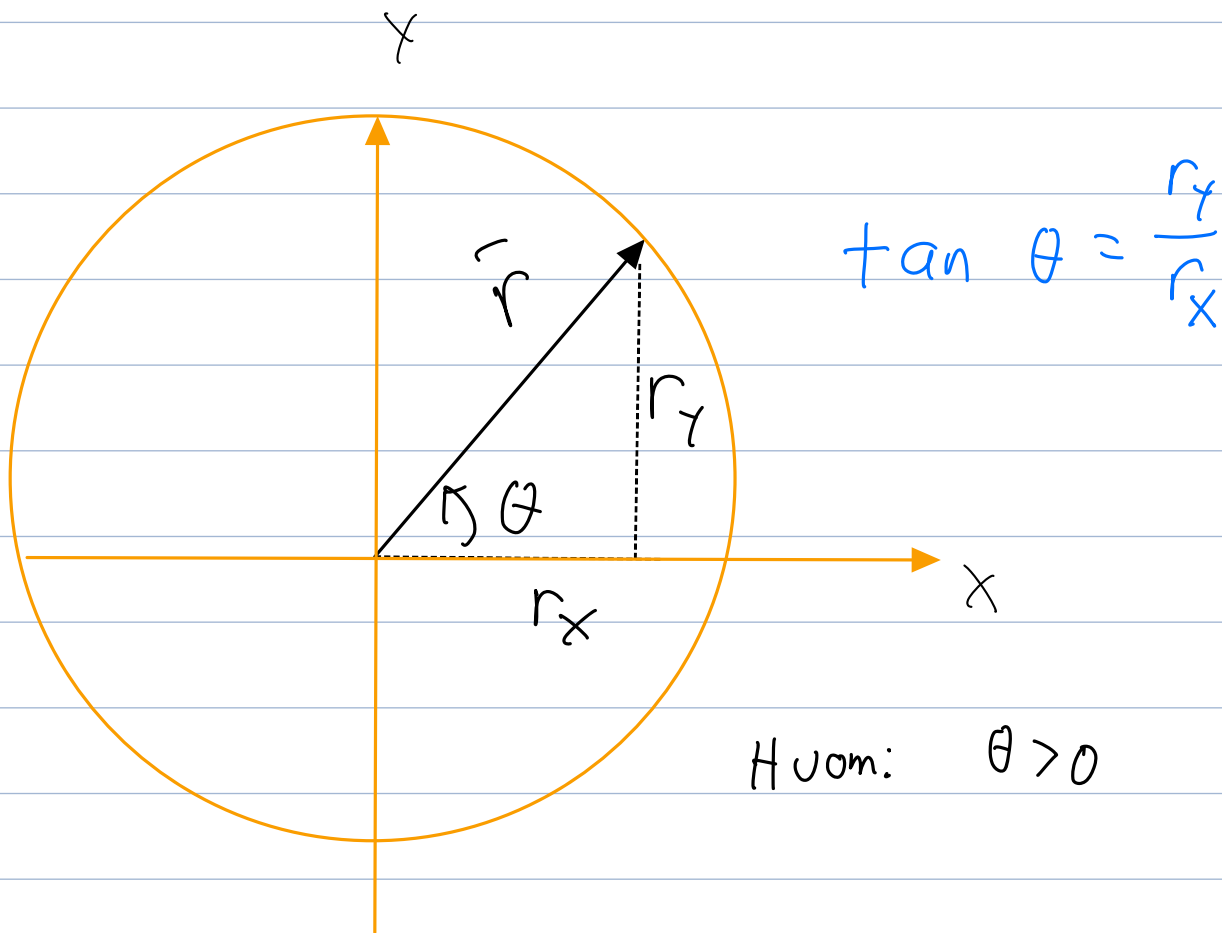


Ja kiihtyvyyys

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \vec{j}$$



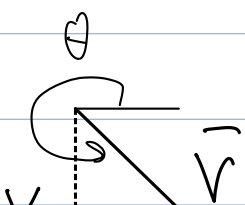
Suuntakulma (esim. paikalle)



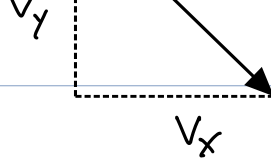
$$r_x = r \cos \theta$$

$$r_y = r \sin \theta$$

Nopeuden suuntakulma?



$$\theta = 315^\circ = 7\pi/4$$



$$\theta = -45^\circ \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$