# FYSP1010

## Luento 4

## 2021

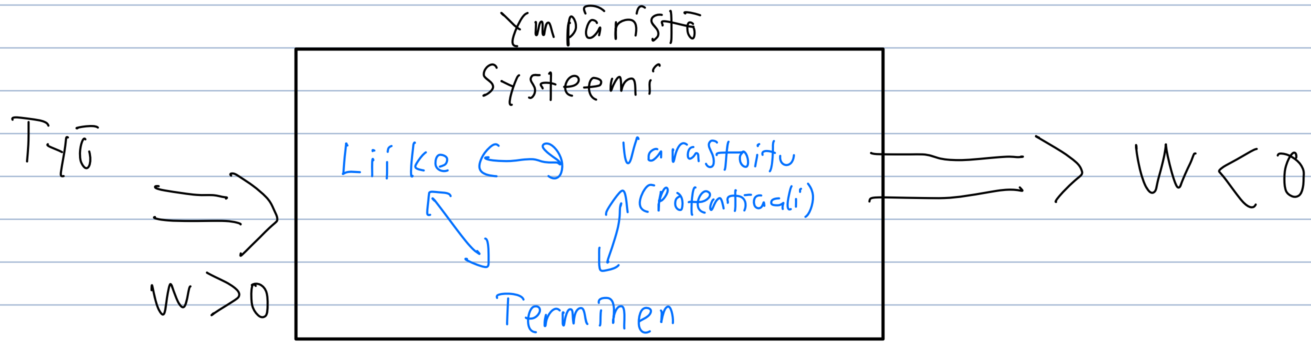
Muista liittyä luentosivulle TIMissä.

- Energia, työ
- Energian säilyminen ja siirtyminen
- Teho

Knight luku 9

# Energia

## Systeemin energia




Vertaus: energia = raha
liikkeen energia = käteinen
varastoitunut energia = tili
työ = opintotuki / lasku

$\Delta E_{syst} = W$ $\Delta$(varallisuus) = opintotuki − laskut

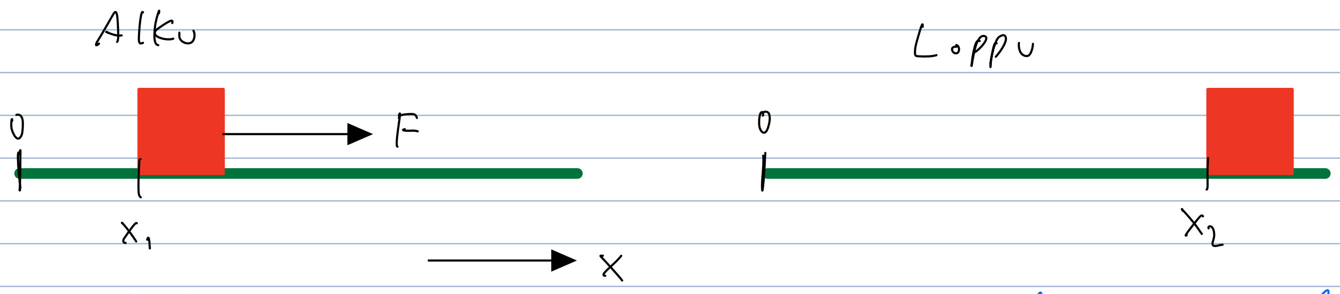
ensi viikko

Nyt: liike-energia ja potentiaalienergia
Seuraava kurssi: Terminen

Esimerkki: Laatikkoon kohdistuu vakiovoima $F = 10\ N$ oikealle:

$m = 1\ kg$

$v_0 = 0$




$v_1 = 0$

$x_1 = 0,1\ m$ $\quad x_2 = 1,1\ m$

$v_2 = ?$

NII:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v} = m v\frac{dv}{dx}$$

$$\left|\ \frac{d}{dt}v(x(t)) = v'(x)\cdot x'(t)\right.$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{v_1}^{v_2} m v\, dv$$

$$\Big/_{x_1}^{x_2} F\cdot x = \Big/_{v_1}^{v_2} m\,\frac{1}{2}v^2$$

$$F x_2 - F x_1 = \frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{1}{2}m v_1^2$$

$$F\cdot\underbrace{\Delta x}_{x_2-x_1} = K_2 - K_1 = \Delta K$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2}m v^2}$$

Voiman tekemä työ $\boxed{W = F\cdot\Delta x}$

$v_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m v_2^2 = F\cdot\Delta x$

$$v_2 = \stackrel{+}{(-)}\sqrt{\frac{2F\Delta x}{m}} = 4,47\,\frac{m}{s},\qquad W = 10N\cdot 1m = 10 J$$

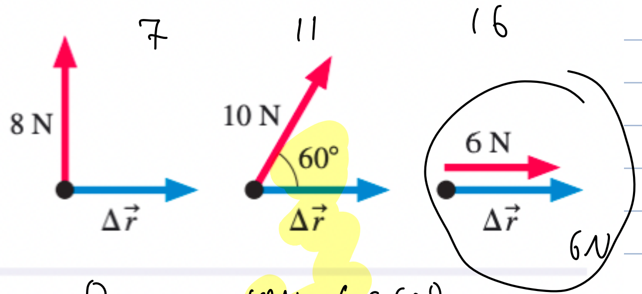
Tämä on esimerkki energian siirtymisestä systeemiin (laatikko)

Systeemiin (laatikko) tehtiin työtä

# Voiman laskeminen

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

Johdantotehtävä: TIM




0

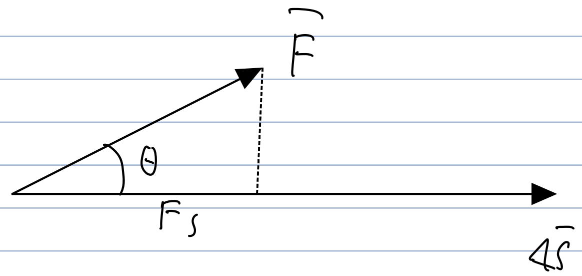
$10N \cdot \cos 60° = 5N$

Mikä voimista tekee suurimman työn.

Muistutus videoilta:

Voiman liikkeen suuntainen komponentti tekee työtä

$F = |\bar{F}|$




$\cos\theta = \frac{F_s}{F}$

$$F_s = F \cdot \cos\theta$$

$$W = F_s \cdot \Delta s = F \cdot \Delta s \cdot \cos\theta = \bar{F} \cdot \Delta\bar{s}$$

Vektorien pistetulo (Matikkapakki)

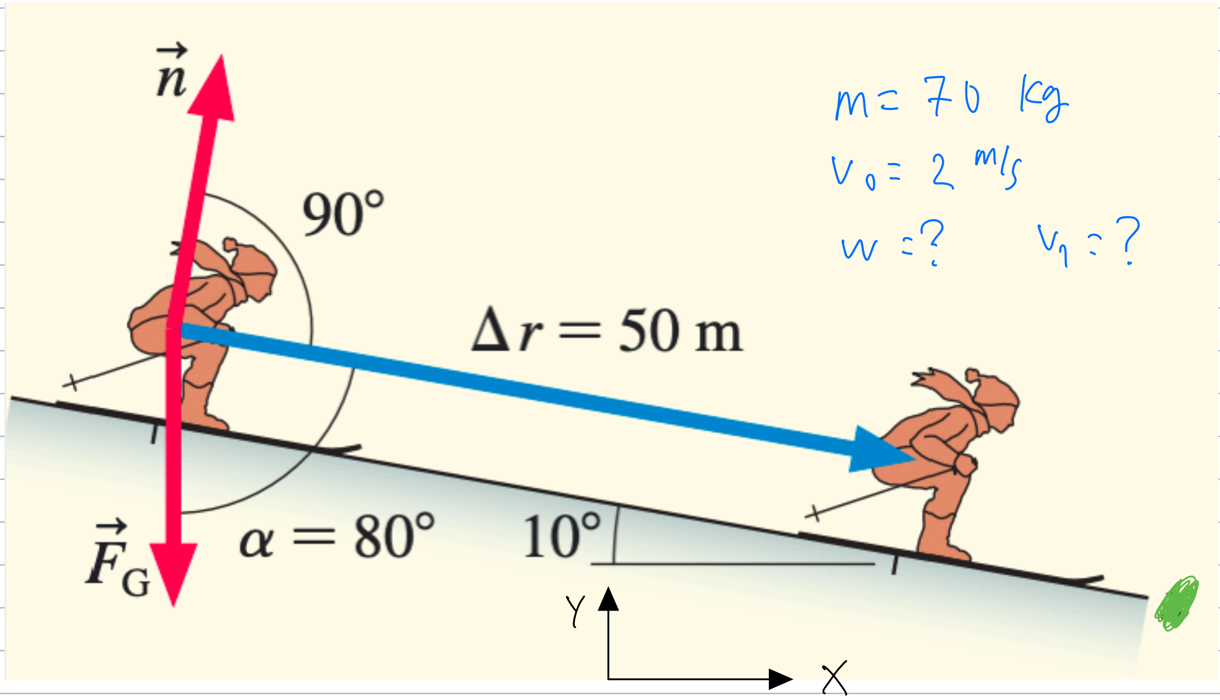
$$\bar{F} \cdot \Delta\bar{s} = |\bar{F}| \cdot |\Delta\bar{s}| \cos\theta \qquad \text{(määritelmä)}$$

Kun siirtymä on pieni, $\Delta\bar{s} \to d\bar{s}$ voimaa voidaan aina pitää vakiona:

$$\boxed{dW = \bar{F} \cdot d\bar{s}}$$

$$\boxed{W = \int_{s_1}^{s_2} \bar{F} \cdot d\bar{s}}$$

Esimerkki: Voiman tekemä työ




TIM

$$\bar{F}_G = mg(-\hat{j}) + 0\,\hat{i}$$

$$\Delta\bar{r} = (50\,m \cdot \cos 10°)\,\hat{i} - (50\,m \cdot \sin 10°)\,\hat{j}$$

$$W = \bar{F}_G \cdot \Delta\bar{s} = 0 + (-mg)\cdot(-50\,m \cdot \sin 10°)$$

$$= +\,mg \cdot 50\,m \cdot \sin 10° = 5960\,J > 0$$

$$W = \Delta E = K_1 - K_0 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

Muistutus: $\begin{cases} \bar{A}\cdot\bar{B} = |\bar{A}||\bar{B}|\cos\theta \\ \bar{A}\cdot\bar{B} = A_x B_x + A_y B_y \end{cases}$

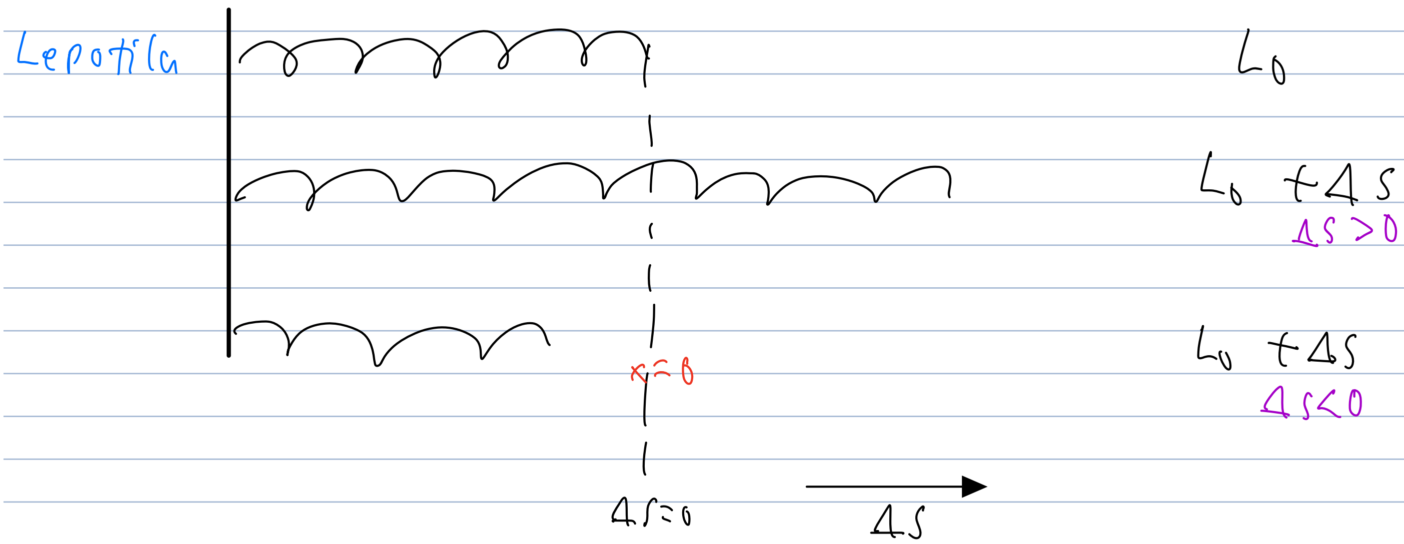
$\bar{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$

$\bar{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$

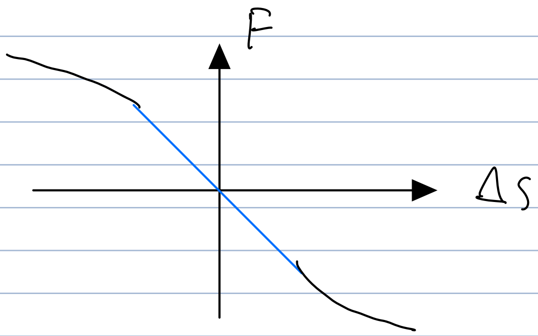
Loppunopeus $v_1$?  $W = \Delta E = \Delta E_{kin}$

$$v_1 = \overset{+}{(-)}\sqrt{\frac{W + \frac{1}{2}mv_0^2}{\frac{1}{2}m}} = 13{,}2\ m/s$$

# Jousista




## Kokeellinen havainto:



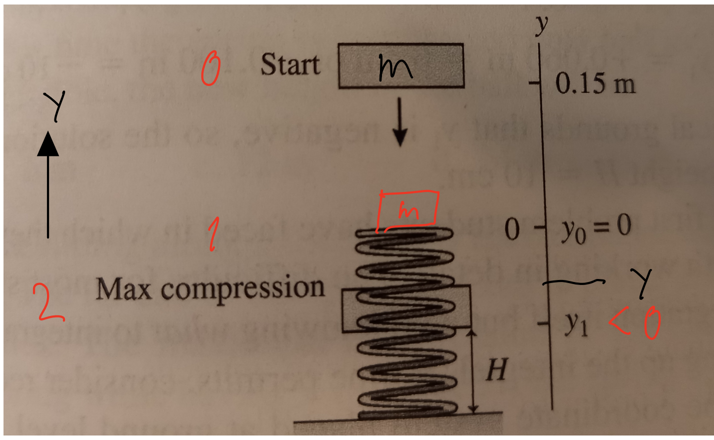

Kun venymä ei ole suuri:

Hooken laki

$$\boxed{F = -k\Delta s}$$

# Esimerkki

$y_1 < 0$




Paljonko jousi enimmillään puristuu kasaan?

$y: y_0 \to y_1$

Alkuperäinen pituus $L = 20$ cm
$m = 10{,}2$ kg
$k = 1$ kN/m

Vaihe $0 \to 1$ Kappale tippuu jousen päälle, $\Delta y = -15$ cm

$K_0 = 0$ (aluksi $v = 0$)

$$K_1 - K_0 = \Delta K = W_1 = F_g \cdot \Delta y = (-mg)\,\Delta y = 15\text{ J} > 0$$

(eli painovoima/maa tekee työtä)
Toki voisimme myös käyttää gravitaatiopotentiaalienergiaa)

Vaihe 1→2: Jousi puristuu kasaan

aluksi liike-energia $K_1$

Lopuksi liike-energia $K_2 = 0$

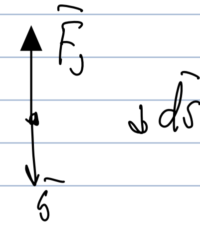
Painovoiman tekemä työ: $W_g = -mg \cdot (y_1 - y_0)$
$= -mg\,y_1 > 0$

Jousen tekemä työ

$$F_j = -k\,\Delta y = -k\,(y - y_0)$$

$$W_j = \int_{y_0}^{y_1} F_j \cdot dy = -k \int_{y_0}^{y_1} (y - y_0)\, dy$$

$$= -k \int_{y_0}^{y_1} y\,dy + \int_{y_0}^{y_1} y_0\, dy$$




$$\bar{F}_j \cdot d\bar{s} = |\bar{F}_j| \cdot |d\bar{s}| \cdot \underbrace{\cos 180^\circ}_{=-1}$$

$$= -k \Big/_{y_0}^{y_1} \tfrac{1}{2} y^2 + k \Big/_{y_0}^{y_1} y_0 \cdot y$$

$$= -\tfrac{1}{2}k(y_1^2 - y_0^2) + k(y_0 \cdot y_1 - y_0^2)$$

$$= -\tfrac{1}{2}k y_0^2 + k y_0 y_1 - \tfrac{1}{2}k y_1^2$$

$$= -\tfrac{1}{2}k(y_0 - y_1)^2 = -\tfrac{1}{2}k y_1^2 < 0$$

(Yleisesti $W_j = -\tfrac{1}{2}k \underset{\text{loppu}}{\Delta x_1^2} - (-\tfrac{1}{2}k \underset{\text{aluksi}}{\Delta x_0^2})$)

Energian säilyminen:

$$K_2 - K_1 = \Delta K = W_{kok,\, 1\to 2} = W_g + W_j$$

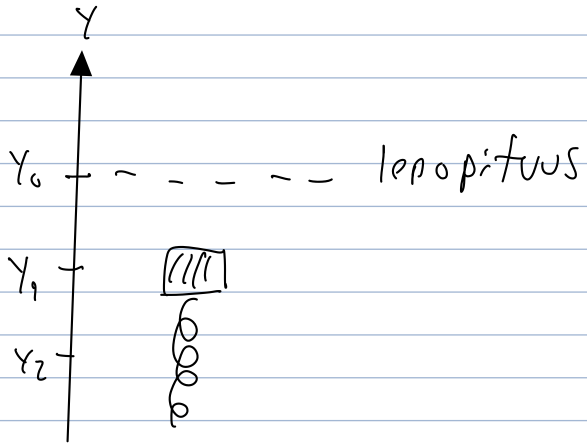
$$-K_1 = -mg y_1 + -\tfrac{1}{2}k y_1^2$$

$$\tfrac{1}{2}k y_1^2 + mg y_1 - K = 0$$

$\cancel{y_1 = 6 \text{ cm}}$, tai $y_1 = -10 \text{ cm}$

$$y_1 = \frac{-mg \pm \sqrt{(-mg)^2 - 4 \cdot (\tfrac{1}{2}k) \cdot (-K)}}{2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot k}$$

Huomautus: toinen tapa jousen tekemän työn laskemiselle. (muuttujanvaihto)




$$F_j = -k(y - y_0)$$

Huom: $\bar{F} \cdot d\bar{s} < 0$, ok

Yleinen tapaus: puristus $y_1 \to y_2$

$$W = \int_{y_1}^{y_2} F_j \, ds = -\int_{y_1}^{y_2} k(y - y_0)\, dy$$

$$= -\int_{\Delta y_1}^{\Delta y_2} k\, u\, du = -k \Big/_{\Delta y_1}^{\Delta y_2} \tfrac{1}{2} u^2$$

$$\boxed{= -\tfrac{1}{2} k \left[ \Delta y_2^2 - \Delta y_1^2 \right]}$$

$u = y - y_0$

$\frac{dy}{du} = 1 \Rightarrow dy = du$

Ylärajalla

$u = y_2 - y_0 = \Delta y_2$

Alarajalla

$u = y_1 - y_0 = \Delta y_1$

# Teho

Eli energian siirtopeus

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

$$[P] = \frac{J}{s} = W$$

Pyöräilijä ajaa eteenpäin vakionopeudella.
Kuinka suurella voimalla hän tekee ~~työtä~~?