

FYSP1010

Mekaniikan perusteet

Luento alkaa 14.15

Heikki Mäntysaari

Kurssin TIM-sivu

<https://r.jyu.fi/DEX>



Aluksi käytännön asiat...

Videot kurssin TIM-sivulla ▽

Luennoilla ei käsitellä kaikkea materiaalia⁰

Etsi TIMistä luennon 1

luentosivu ja liity luennoille.

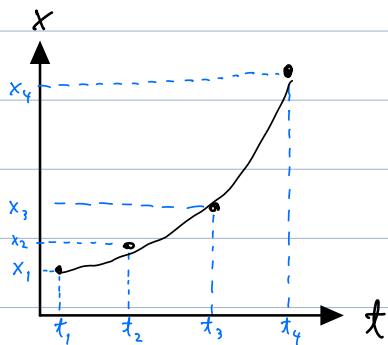
Kirjoita luentoseinälle jotain,
vaikeaa kotipaikkakuntasi.

Luennon keskeiset asiat

- Kinematiikan kuvaajat
- Keskinopeus ja -kiihtyvyys
- Hetkellinen nopeus ja -kiihtyvyys
- Liike useammassa ulottuvuudessa
- Derivoimien ja integroimien soveltaminen

Knight luvut 1-4
(pyörimisliike tarkemmin myöhemmin)

1. Yksiulotteinen liike



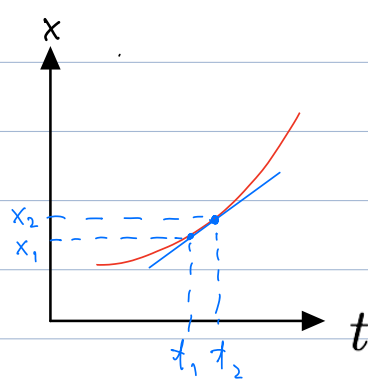
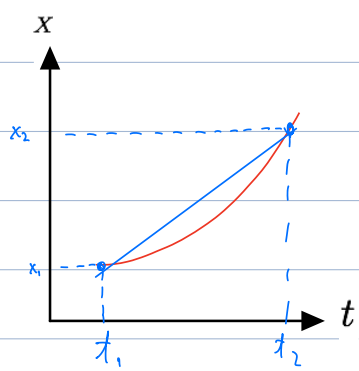
Mitattu paikat
 x_i ajan hetkellä t_i

Keskinopeus $v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2}$

Kuljettu matka $x = v_{avg} \cdot \Delta t$

v v v

Hetkeellinen nopeus:



Nopeus = (x, t) kuvaajan tangentin kulmakerroin
 Eli paikan muutosnopeus

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t) \quad x(t)$$

Vastaavasti kiihtyvyys on nopeuden muutosnopeus

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad x''(t)$$

Nopeus: paikan derivaatta

Kiihtyvyys: nopeuden derivaatta

Kääntäen:

Paikka: nopeuden integraali

Nopeus: kiihtyvyyden integraali

Esimerkki 1:

$$x(t) = 2t^4 - t^2 + 1 \quad [m]$$

$$v(t) = 8t^3 - 2t \quad [m/s]$$

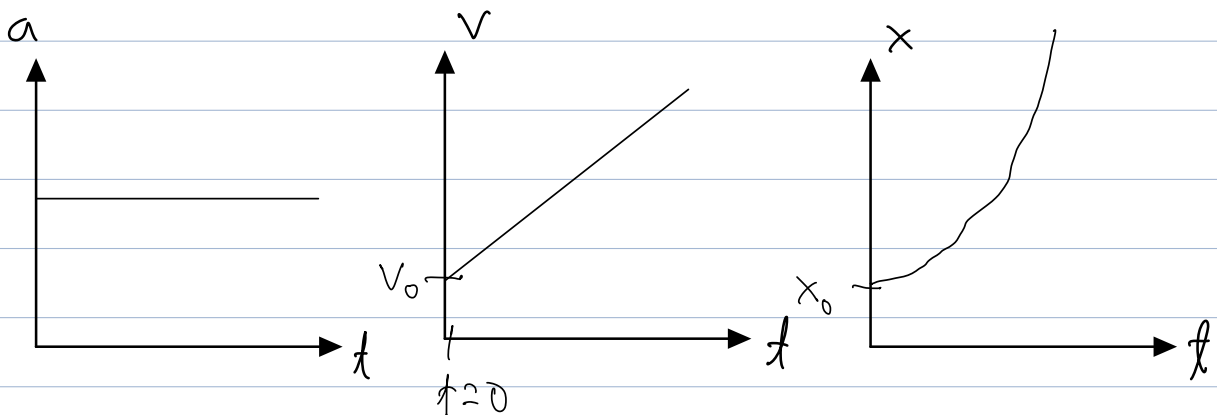
$$a(t) = 24t^2 - 2 \quad [m/s^2]$$

Esimerkki 2: tasainen kiihtyvyys

$$a(t) = a \quad (\text{vakio})$$

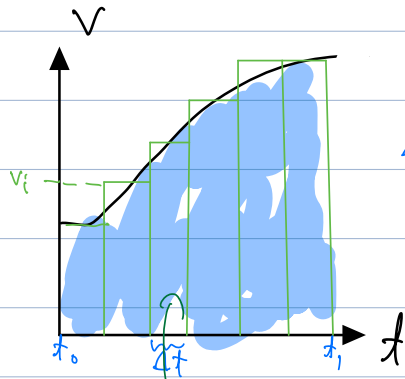
$$v(t) = \int a dt = a \cdot t + v_0$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v dt = \int (a \cdot t + v_0) dt \\ &= \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \end{aligned}$$



Huomi: integraali = käyrän rajaama

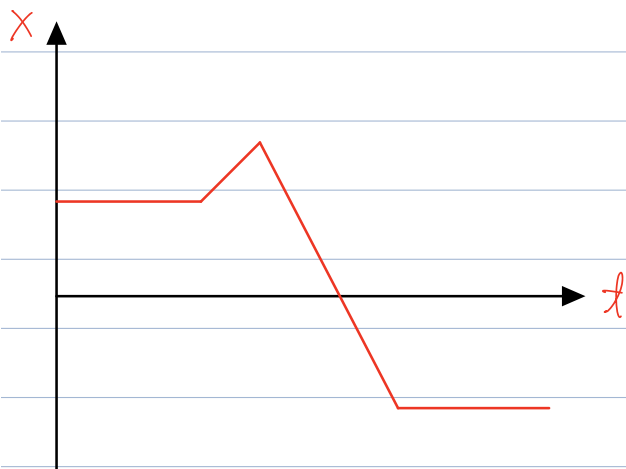
pinta-ala.



$$\Delta x = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N v_i \Delta t = \int_{t_0}^{t_1} v dt$$

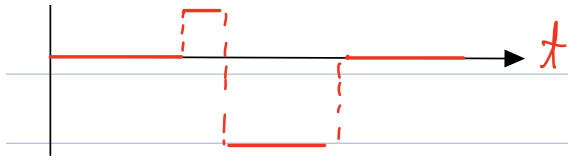
pinta-ala $v_i \Delta t_i$ (oletetaan $\Delta t_i = \Delta t$)

Esimerkki 3: kinematiikan kuvaajat

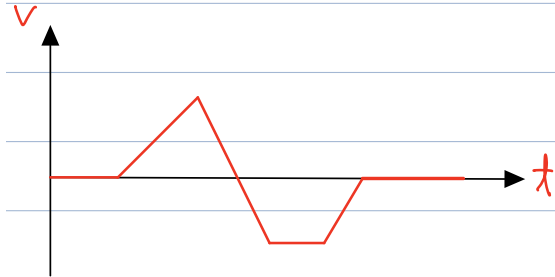


Mikä on oikea v, t kuvaaja?

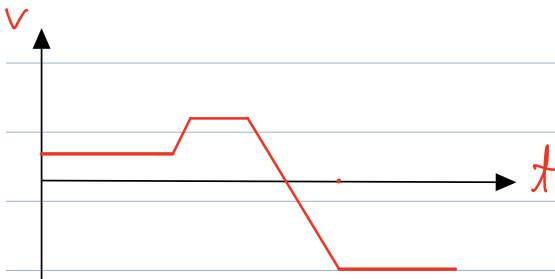




(1)



(2)



(3)

Gravitaatio

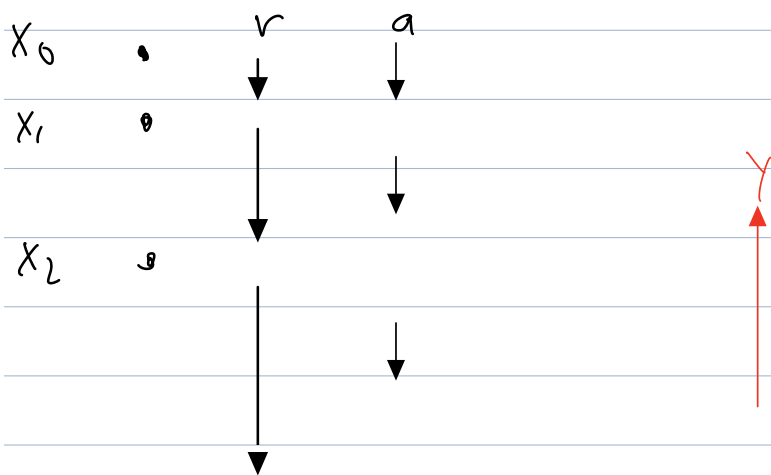
Tasainen kiihtyvyys $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (alas)

Kappale heitetään talon katolta korkeudelta h .

Millä nopeudella se osuu maahan?

Liikediagrammi:

(sama aikaväli)

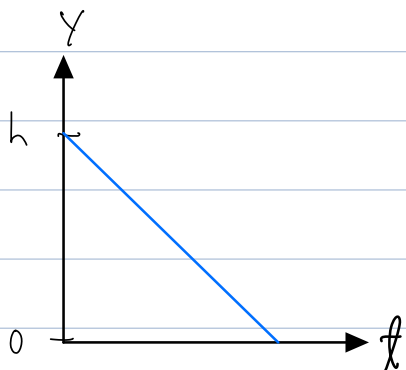


x_3 ↓

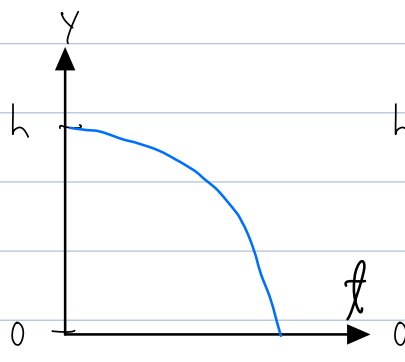
$$a = -g$$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

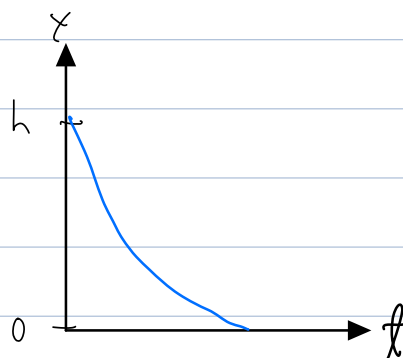
Kappaleen paikka ajan funktiona?



(a)



(b)



(c)

Laskuesimerkki:

Jos alkunopeus on v_0 , niin millä nopeudella v_1 kappale putoaa maahan korkeudelta h ?

Edellä johdimme

$$y = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + h$$

$$v_1 = ?$$

$$t = ?$$

$$y = 0$$

$$a = -g$$

Oletus: ei huomioida ilmanvastusta.

$$v_1 = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v_1 - v_0}{a}$$

$$0 = \frac{1}{2}(-g) \left(\frac{v_1 - v_0}{-g} \right)^2 + v_0 \frac{v_1 - v_0}{-g} + h$$

$$= -\frac{1}{2g} (v_1^2 + v_0^2 - 2v_1v_0) + \frac{v_0v_1 - v_0^2}{-g} + h$$

$$= -\frac{1}{g} \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} - v_0^2 \right) + h$$

$$v_1^2 = v_0^2 + 2gh$$

$$v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$h = 10 \text{ m}$$

$$v_1 = \sqrt{\left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}}$$

\approx luev $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Mistä näemme että tulos on järkevä? Kirjoita luentoseinälle!

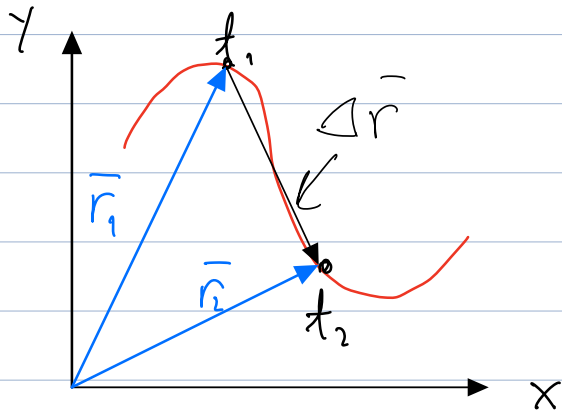
2. Liike useammassa

... ..

U L O T T U V V U U S L O S U

Useammassa ulottuvuudessa esim.
paikan kuvaamiseen ei riitä yksi
luku kuten yllä, tarvitaan
vektori \vec{r} (tai \vec{r} tai \mathbf{r})

Kertaa vektorit Matikkapakista
<https://r.jyu.fi/DGQ>



$$\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

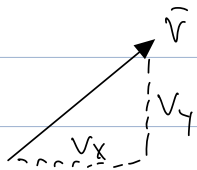
yksikkö esim. m

Siirtymä $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$
 $= \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j}$

Keskinopeus $\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j}$
 $= \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)$

Hetkellinen nopeus

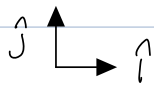
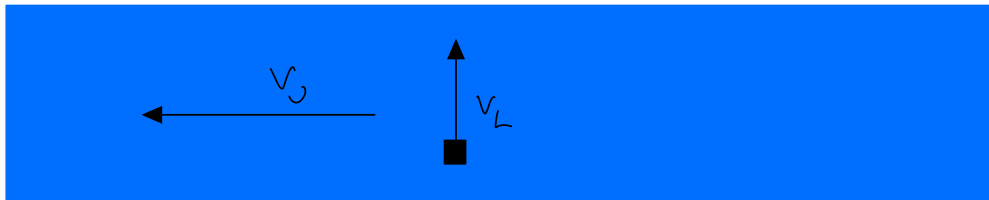
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$



Vauhti $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Vastaa vasti kiihtyvyys $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

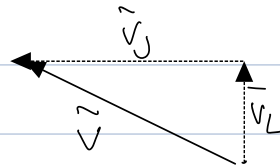
Esimerkki: joki



Laiava kiihdyttää joessa suoraan eteenpäin nopeudella $v_L = 2t$ [m/s]
Joki virtaa vasemmalle nopeudella $v_j = 3$ [m/s]

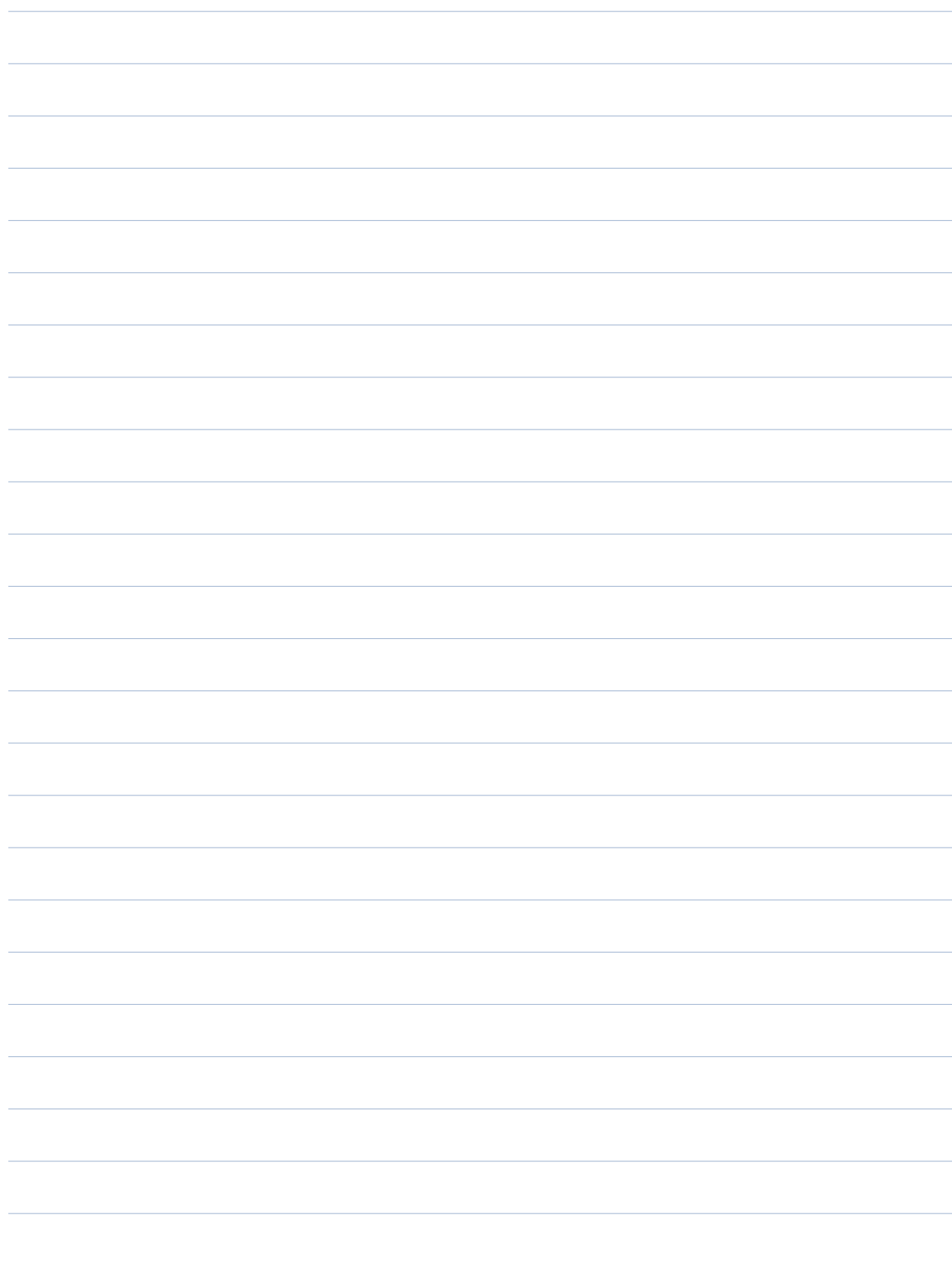
Laiivan nopeus

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_L + \vec{v}_j = 2t\vec{j} - 3\vec{i} \\ &= (-3, 2t)\end{aligned}$$

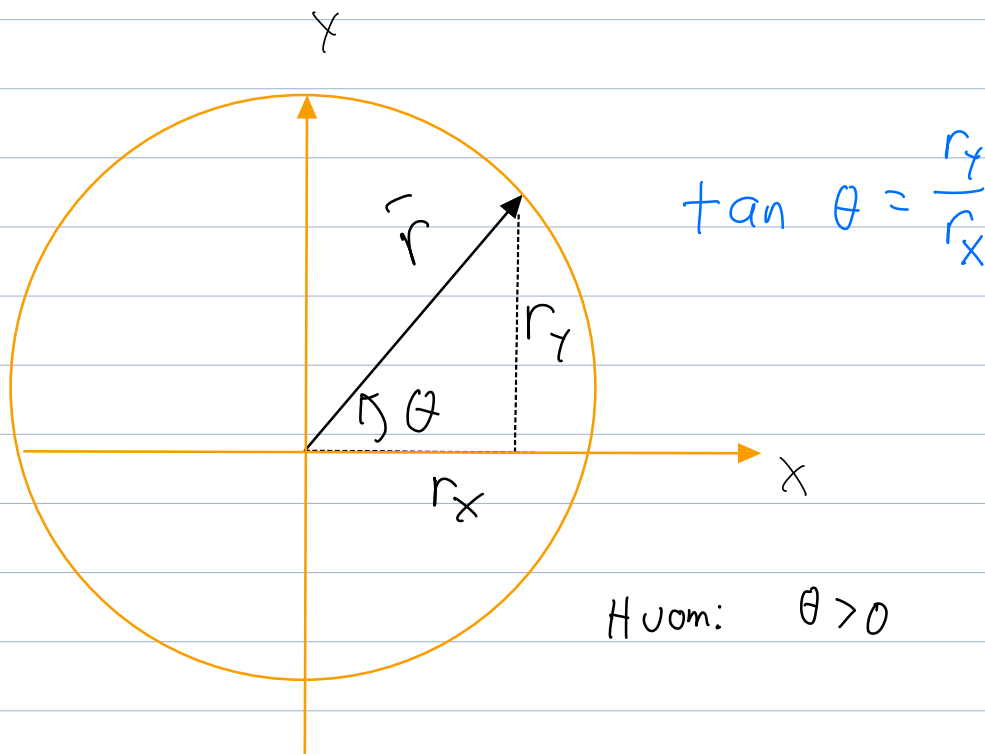


Ja kiihtyvyydet

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{j}$$



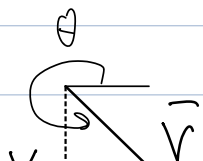
Suuntakulma (esim. paikalle)



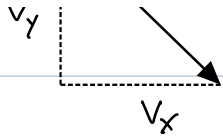
$$r_x = r \cos \theta$$

$$r_y = r \sin \theta$$

Nopeuden suuntakulma?



$$\theta = 315^\circ = 7\pi/4$$



$$\theta = -45^\circ \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$