

KENA222
S-09
demot 1
(1/3)

① fotonin energia $E = h\nu$ $\left(\begin{array}{l} h \approx 4,135669 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \\ c \approx 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s} \end{array} \right)$
 $= \frac{hc}{\lambda} \approx \frac{1,2398 \cdot 10^{-6} \text{ eV} \cdot \text{m}}{\lambda}$

$\lambda \text{ (m)}$	E
10^{-1}	$1,24 \cdot 10^{-5} \text{ eV} = 12,4 \mu\text{eV}$
10^{-3}	$1,24 \text{ meV}$
10^{-5}	124 meV
10^{-6}	$1,24 \text{ eV}$
10^{-7}	$12,4 \text{ eV}$
10^{-9}	$1,24 \text{ keV}$
10^{-12}	$1,24 \text{ MeV}$
10^{-13}	$12,4 \text{ MeV}$

② de Broglie: $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v}$

$$\Rightarrow v = \frac{h}{m_0 \lambda} = \frac{6,626076 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{9,1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}}$$
$$= 7,2738 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx \underline{\underline{7,3 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Elektronin kineettinen energia $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v^2$

$$= \frac{1}{2} \cdot 9,1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (7,2738 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 2,4098 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$
$$\approx \underline{\underline{150 \text{ eV}}}$$

Fotonille $E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E} = \frac{4,135669 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \cdot 2,9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{150,4254 \text{ eV}}$
 $\approx \underline{\underline{8,24 \text{ nm}}}$

Fotonin aallonpituus on röntgenalueella SM-spektrissä

$\Rightarrow$ fotonin käyttö röntgen-fotoelektronispektroskopiassa (XPS)

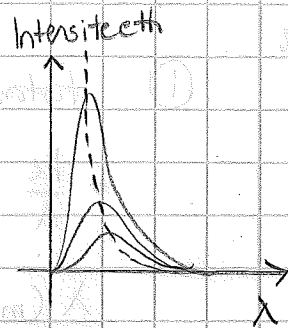
③ Wienin särtymälaki: $\lambda_{\max} T = \frac{hc}{5k}$

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{5kT} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 2,9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 5800 \text{ K}}$$

Boltzmannin vakio

$$\approx 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ m} \approx 500 \text{ nm}$$

(vihreän alueella)



④ Valosähköinen ilmiö



Saapuvan fotonin energia kuluu elektronin irrotustyöksi + elektronin kineettiseksi energiaksi:

$$h\nu = \Phi + E_{\text{kin}}$$



$$\Rightarrow E_{\text{kin}}(\nu) = h\nu - \Phi \quad (\text{suoran yhtälö } "y = kx + b")$$

Tuntemme suoralta 2 pistettä, joten voimme muodostaa suoran yhtälön.

$\lambda \text{ (nm)}$	$\nu (= \frac{c}{\lambda}) \text{ (}\frac{1}{\text{s}}\text{)}$	$E_{\text{kin}} \text{ (J)}$
400	$7,495 \cdot 10^{14}$	$1,280 \cdot 10^{-19}$
300	$9,993 \cdot 10^{14}$	$2,935 \cdot 10^{-19}$

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Nyt siis

$$= 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

$$E_{\text{kin}} - 1,280 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \frac{2,935 \cdot 10^{-19} \text{ J} - 1,280 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{9,993 \cdot 10^{14} \frac{1}{\text{s}} - 7,495 \cdot 10^{14} \frac{1}{\text{s}}} \cdot (\nu - 7,495 \cdot 10^{14} \frac{1}{\text{s}})$$

$$\Leftrightarrow E_{\text{kin}} = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot \nu - 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 7,495 \cdot 10^{14} \frac{1}{\text{s}} + 1,280 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\Leftrightarrow E_{\text{kin}} = \underbrace{6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}_{= h \text{ a)}} \cdot \nu - \underbrace{3,685 \cdot 10^{-19} \text{ J}}_{= \Phi \text{ b)}}$$

(4) jatkuu

Pienin mahdollinen taajuus, joka pystyy irrottamaan elektroneja saadaan vastaa tilannetta, jossa $E_{\text{kin}} = 0$

$$\Rightarrow 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot \gamma_0 = 3,685 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = 5,562 \cdot 10^{14} \frac{1}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = c/\gamma_0 \approx 5,39 \cdot 10^{-7}$$

Siis

$$a) h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$b) \Phi = 3,685 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

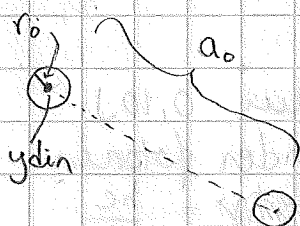
$$c) \lambda_0 = 540 \text{ nm}$$

(5) Vedin 1s - elektronin aaltofunktio:

$$\Psi(r) = \left(\frac{1}{\pi a_0^3} \right)^{1/2} e^{-r/a_0} \Rightarrow |\Psi(r)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

(todennäköisyystiheys)

$$\text{Pienen } r_0 \text{ - säteisen pallon tilavuus} = \frac{4}{3} \pi r_0^3 = 8\pi$$



(ei skaalassa)

Oletetaan, että tilavuus on niin pieni, että Ψ pysyy sen sisällä vakiona.

Todennäköisyys löytää elektronin tilavuudesta 8π on

$$|\Psi|^2 8\pi = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0} \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3 = \frac{4r_0^3}{3a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

$$a) r=0 : |\Psi|^2 8\pi = \frac{4}{3} \left(\frac{r_0}{a_0} \right)^3 \cdot \underbrace{e^{-2 \cdot 0/a_0}}_{=1} = \frac{4}{3} \left(\frac{1,0}{53} \right)^3 \approx \underline{\underline{9,0 \cdot 10^{-6}}}$$

$$b) r=a_0 : |\Psi|^2 8\pi = \frac{4}{3} \left(\frac{r_0}{a_0} \right)^3 \cdot \underbrace{e^{-2 \cdot a_0/a_0}}_{=e^{-2}} = \frac{4}{3} \left(\frac{1,0}{53} \right)^3 \cdot e^{-2} \approx \underline{\underline{1,2 \cdot 10^{-6}}}$$

⑥ (Muista: Operaattoreiden $\hat{\Omega}_1$ ja $\hat{\Omega}_2$ kommutaattori)
 on $[\hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_2] = \hat{\Omega}_1 \hat{\Omega}_2 - \hat{\Omega}_2 \hat{\Omega}_1$

$$a) \left[\frac{d}{dx}, \frac{1}{x} \right] \psi = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \psi \right) - \frac{1}{x} \left(\frac{d}{dx} \psi \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{x^2} \right) \psi + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \psi - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \psi = \left(-\frac{1}{x^2} \right) \psi$$

tulon derivoimista
 $((fg)') = f'g + g'f$

Süsä $\left[\frac{d}{dx}, \frac{1}{x} \right] = -\frac{1}{x^2}$

$$b) \left[\frac{d}{dx}, x^2 \right] \psi = \frac{d}{dx} (x^2 \psi) - x^2 \left(\frac{d}{dx} \psi \right)$$

$$= 2x \psi + x^2 \frac{d}{dx} \psi - x^2 \frac{d}{dx} \psi = 2x \psi$$

Süsä $\left[\frac{d}{dx}, x^2 \right] = 2x$

⑦ Oletetaan, että fotonit emittoituvat samaan suuntaan.

liikemäärä säilyy.



x ←

Fotoneja emittoituu 0,10 J sekunnissa. Yhden fotonin energia on $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

$$= \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 2,9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{650 \cdot 10^{-9} \text{ m}}$$

$$\approx 3,056 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Süsä sekunnissa emittoituu $0,10 \text{ J} / 3,056 \cdot 10^{-19} \text{ J} \approx 3,2722 \cdot 10^{17}$ fotonia.

10 vuodessa näitä kertyy $10 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 3,2722 \cdot 10^{17}$
 $\approx 1,0319 \cdot 10^{26}$

Fotonin liikemäärä on $p = h/\lambda \approx 1,01938 \cdot 10^{-27} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

Fotonit muuttavat liikemäärää x-akselin suunnassa

$$\Delta p_f = 1,0319 \cdot 10^{26} \cdot 1,01938 \cdot 10^{-27} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \approx 0,10519 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Madon liikemäärän muutos on yhtä suuri (mutta vastakkaismerkkinen). Tästä saadaan ratkaistua madon $\rightarrow$

vauhdin muutos:

$$|\Delta v_{\text{mato}}| = \frac{|\Delta p_{\text{f}}|}{m_{\text{mato}}} = \frac{0,10519 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}}{0,005 \text{ kg}}$$

$$\approx \underline{\underline{21,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

$$\textcircled{8} \quad \psi(x) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ax^2}$$

Epätarkkuusperiaatteen mukaan $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar$

Paikan neliöllinen keskiarvo $\Delta x = (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)^{1/2}$ ja
liikemäärän " " " " $\Delta p = (\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2)^{1/2}$ ja

On siis laskettava odotusarvot $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ ja $\langle p^2 \rangle$.

$$\underline{\langle x \rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi dx = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2ax^2} dx = \underline{0}$$

(x pariton, e^{-2ax^2} parillinen funktio $\Rightarrow$
näiden tulo on pariton.)

Parittoman funktion integraali $-a$:sta $+a$:han
(nyt $a \rightarrow \infty$) antaa nollan.)

$$\underline{\langle x^2 \rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x^2 \psi dx = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2ax^2} dx$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2a}\right)^{3/2} \sqrt{\pi}$$

(integraalitaulukosta)

$$= \frac{(2a)^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2a)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \sqrt{\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{4a}}}$$

$$\text{Sis } \Delta x = (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{4a} - 0^2\right)^{1/2} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{a}}}}$$

$$\left(\begin{aligned} (*) \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx \\ = \frac{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}) \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{a^n} \sqrt{\frac{1}{a}}, n=1,2,\dots \end{aligned} \right)$$

→

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(-i\hbar \frac{d\psi}{dx} \right) dx \quad \text{ja} \quad \langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(-\hbar^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} \right) dx$$

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/4} \cdot \underbrace{(-2ax)}_{\text{sisäfunktion derivaatta}} e^{-ax^2} & \text{ja} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} = \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/4} \left[(-2ax)^2 e^{-ax^2} + (-2a) e^{-ax^2} \right] & (\text{tulon derivoiminen}) \\ = \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/4} (4a^2 x^2 - 2a) e^{-ax^2} \end{cases}$$

Sis

$$\langle p \rangle = \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/2} \cdot (-2a) \cdot (-i\hbar) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2ax^2} dx}_{=0 \text{ (kuten } \langle x \rangle \text{-in tapaus)}} = 0 \quad \text{ja}$$

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} -\hbar^2 \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/4} e^{-ax^2} \cdot \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/4} (4a^2 x^2 e^{-ax^2} - 2a e^{-ax^2}) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} -\hbar^2 \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/2} \cdot 2a (2ax^2 e^{-2ax^2} - e^{-2ax^2}) dx$$

$$= -2a\hbar^2 \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (2ax^2 - 1) e^{-2ax^2} dx$$

$$= -2a\hbar^2 \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/2} \left[2a \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2ax^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2} dx \right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2a} \right)^{3/2} \frac{1}{\pi}^{1/2} &= \left(\frac{\pi}{2a} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

integraali-
taulukkoista

$$= -2a\hbar^2 \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/2} \left[a \left(\frac{1}{2a} \right)^{3/2} \pi^{1/2} - \left(\frac{\pi}{2a} \right)^{1/2} \right] = -2a\hbar^2 (2a)^{1/2} a \left(\frac{1}{2a} \right) \left(\frac{1}{2a} \right)^{1/2} + 2a\hbar^2 \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{-1/2} = 1$$

$$\Delta p = (\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2)^{1/2} = (a\hbar^2 - 0^2)^{1/2} = a^{1/2} \hbar = \underline{a\hbar^2}$$

Eli $\underline{\Delta x \Delta p} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} \hbar = \underline{\frac{1}{2} \hbar}$

Tämä on Heisenbergin epätarkkuuden alaraja, joten epätarkkuusperiaate ei rikkoudu.