Loppukoe 19/02/2003 (aika: 4 h)

Stokastiset prosessit ja niiden sovellukset

1. Nolla-Yksi lakit (6 pistettä)

   (a) Formuloi Hewitt-Savage 0-1-laki.

   (b) Olkoot $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ riippumattomia satunnaismuuttujia siten, että

   $$\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

   Käyttämällä Kolmogorovin 0-1-laki, osoita:

   i. Jos α_n ovat reaalilukuja, niin

   $$\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varepsilon_n \text{ olemassa}\right) \in \{0, 1\}.$$

   ii. $\mathbb{P}\left(\omega : \lim_n \sum_{k=1}^{n} (1 + \varepsilon_k(\omega)) < \infty\right) \in \{0, 1\}$.

2. Summien konvergenssi (9 pistettä)

   (a) Olkoon $\xi_1, \xi_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ riippumattomia satunnaismuuttujia. Formuloi näille satunnaismuuttujille Three-Series-Theorem (välttämätön ja riittävä ehto sille, että summa $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ on olemassa melkein varmasti).

   (b) Olkoon $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ riippumattomia satunnaismuuttujia siten, että

   $$\mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1 - \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \frac{1}{2} \in (0, 1).$$

   Mille $a_1, a_2, ... \in \mathbb{R}$

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon_n}{n} + a_n\right)$$

   on olemassa melkein varmasti?

   (c) Olkoot $\xi_1, \xi_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ riippumattomia satunnaismuuttujia siten, että $\mathbb{P}(\xi_n = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$ ja $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}$. Onko

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n}$$

   on olemassa melkein varmasti?

   (d) Olkoot $\xi_1, \xi_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ riippumattomia satunnaismuuttujia siten, että $\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \text{ suppenee}\right) = 1$ ja $c > 0$. Osoita, että

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\xi_n| \geq c) < \infty.$$

   Vihje: Käytä Borel-Cantellin lemmaa.

3. Ehdollinen odotusarvo (5 pistettä)

   (a) Olkoot $\Omega := [0,1]$, $\mathcal{F} := \mathcal{B}([0,1])$ Borelin σ-algebra ja $\mathbb{P}$ Lebesguen mitta. Laske $\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ missä $\mathcal{G} := \sigma([0,1/2),[3/4,1])$ ja $f(t) := t^2$.

   (b) Olkoot $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ riippumattomia satunnaismuuttujia, siten että $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = 1/2$. Käyttämällä ehdollisen odotusarvon omaisuuksia laske

$$\mathbb{E}\Big(\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + (\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3)\varepsilon_4 \,\Big|\, \mathcal{G}\Big)$$

   missä $\mathcal{G} := \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_4)$.

4. Martingaalit (5 pistettä)

   (a) Olkoot $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ riippumattomia satunnaismuuttujia siten, että

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

   Määrittelemme $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ jos $n \geq 1$, $M_0(\omega) := 1$ ja

$$M_n(\omega) := e^{a\big(\varepsilon_1(\omega)+\cdots+\varepsilon_n(\omega)\big)-2n}$$

   jos $n \geq 1$. Mille $a \in \mathbb{R}$ prosessi $M = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ on ali-martingaali? Perustele vastauksesi!

   (b) Olkoot $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ riippumattomia satunnaismuuttujia siten, että

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

   Määrittelemme $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ jos $n \geq 1$, $M_0 := 0$ ja

$$M_{n+1} := M_n + (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \varepsilon_{n+1})$$

   jos $n \geq 0$. Onko $M = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ martingaali, ali-martingaali vai ylimartingaali? Perustele vastauksesi!

5. Pysähdyshetket (5 pistettä)

   (a) Olkoot $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus historian $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ kanssa. Määrittele pysähdyshetki $\tau : \Omega \to \{0,1,2,...\} \cap \{\infty\}$.

   (b) Olkoot $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ riippumattomia satunnaismuuttujia siten, että

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

   Määrittelemme $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ jos $n \geq 1$.

      i. Onko $\tau(\omega) := \inf\{n \geq 0 : \varepsilon_1(\omega) + \cdots \varepsilon_n(\omega) = 10\}$ pysähdyshetki?

      ii. Onko $\tau(\omega) := \inf\{n \geq 0 : \varepsilon_1(\omega) + \cdots \varepsilon_{2n}(\omega) = 10\}$ pysähdyshetki?

   (Määrittelemme $\inf \emptyset := \infty$.)

   (c) Olkoot $\sigma, \tau : \Omega \to \{0,1,2,...\} \cup \{\infty\}$ pysähdyshetkiä. Osoita, että $\min\{\sigma, \tau\}$ on pysähdyshetki!