

## Stochastic Modeling

### Exercises 27.10.2009

-7-

- (1) Let  $(f_i)_{i=0}^\infty$  be a homogeneous irreducible Markov chain starting in  $k \in X$  and let  $k$  be positive persistent. Let

$$\begin{aligned} T_0 &:= 0 \\ T_1 &:= \inf \{i > 0 | f_i = k\}, \\ T_2 &:= \inf \{i > T_1 | f_i = k\}, \\ T_3 &:= \dots \end{aligned}$$

- (a) Show that  $T_2 - T_1$  and  $T_1$  are independent.

**Hint:** Show that  $\mathbb{P}(T_2 - T_1 = l | T_1 = m) = \mathbb{P}(T_2 - T_1 = l)$ .

- (b) Show that  $(T_i - T_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, \dots$  are independent.

**Hint:** Show that  $\mathbb{P}(T_{n+1} - T_n = x_{n+1} | \bigcap_{i=1}^n \{T_i - T_{i-1} = x_i\}) = \mathbb{P}(T_{n+1} - T_n = x_{n+1})$ .

Use  $\{f_{T_n} = k\} = \Omega$ , the relation

$\bigcap_{i=1}^n \{T_i - T_{i-1} = x_i\} = \{T_1 = x_1\} \cap \{T_2 = x_1 + x_2\} \cap \dots \cap \{T_n = x_1 + \dots + x_n\}$  and the strong Markov property (Proposition 3.6.1).

- (c) Show using the *Strong Law of Large Numbers*:

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega : \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m(\omega)}{m} = \mathbb{E}T_1 \right\} \right) = 1,$$

- (d) (Proposition 3.7.16) Show that

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_k(n)}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}T_1} \right\} \right) = 1.$$

**Hint:** Show that  $T_{N_k(n)} \leq n < T_{N_k(n)+1}$ .

- (2) Given a homogeneous Markov chain with state space  $X$  and with communicating states  $k, l \in X$  one shows: If  $k$  is persistent, then  $l$  is persistent as well.

- (3) Assume a homogeneous Markov chain  $(f_i)_{i=0}^\infty$  with state space  $X = \{0, \dots, N\}$  and transition matrix

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+1} & \cdots & \frac{1}{N+1} \\ \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+1} & \cdots & \frac{1}{N+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+1} & \cdots & \frac{1}{N+1} \end{pmatrix}$$

Show that each state  $k \in X$  is persistent.

**Stokastiset mallit**  
**Harjoitukset 27.10.2009**  
**-7-**

- (1) Olkoon  $(f_i)_{i=0}^\infty$  homogeeninen pelkistymätön Markovin ketju,  $k \in X$  positiivinen palautuva (positive persistent) ja  $\mathbb{P}(f_0 = k) = 1$ . Määritellään funktiot  $T_i$  kaavoilla

$$\begin{aligned} T_0 &:= 0, \\ T_1 &:= \inf \{i > 0 \mid f_i = k\}, \\ T_2 &:= \inf \{i > T_1 \mid f_i = k\}, \\ T_3 &:= \dots \end{aligned}$$

- (a) Osoita, että  $T_2 - T_1$  ja  $T_1$  ovat riippumattomat.

**Vihje:** Osoita, että  $\mathbb{P}(T_2 - T_1 = l \mid T_1 = m) = \mathbb{P}(T_2 - T_1 = l)$ .

- (b) Osoita, että  $(T_i - T_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, \dots$  ovat riippumattomat.

**Vihje:** Osoita, että  $\mathbb{P}(T_{n+1} - T_n = x_{n+1} \mid \bigcap_{i=1}^n \{T_i - T_{i-1} = x_i\}) = \mathbb{P}(T_{n+1} - T_n = x_{n+1})$ .

Käytä  $\{f_{T_n} = k\} = \Omega$  ja

$\bigcap_{i=1}^n \{T_i - T_{i-1} = x_i\} = \{T_1 = x_1\} \cap \{T_2 = x_1 + x_2\} \cap \dots \cap \{T_n = x_1 + \dots + x_n\}$  ja vahvaa Markovin ominaisuutta (Lause 3.6.1).

- (c) Osoita seuraava käyttämällä *vahvaa suurten lukujen lakia* (the Strong Law of Large Numbers):

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega : \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m(\omega)}{m} = \mathbb{E}T_1 \right\} \right) = 1,$$

- (d) (Lause 3.7.16) Osoita, että

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_k(n)}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}T_1} \right\} \right) = 1.$$

**Vihje:** Osoita, että  $T_{N_k(n)} \leq n < T_{N_k(n)+1}$ .

- (2) Olkoon  $X$  homogeenisen Markovin ketjun tila-avaruus ja tilat  $k, l \in X$  kommunikoivia. Todista väite: Jos  $k$  on palautuva, niin myös  $l$  on palautuva.

- (3) Olkoot  $(f_i)_{i=0}^\infty$  homogeeninen Markovin ketju,  $X = \{0, \dots, N\}$  sen tila-avaruus ja

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+1} & \dots & \frac{1}{N+1} \\ \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+1} & \dots & \frac{1}{N+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+1} & \dots & \frac{1}{N+1} \end{pmatrix}$$

siirtymämatriisi. Osoita, että  $k \in X$  on palautuva.

## Summary

The homogeneous Markov chain has a stationary distribution:  
Give (if possible) sufficient conditions and an example for each case.

	no	a unique one	more than one
$X = \{0, \dots, K\}$			
$\#X = \infty$			

## Tiivistelmä

Anna (jos mahdollista) kaikissa taulukon kuudessa tapauksessa riittävät ehdot sille, että taulukon vasemman sarakkeen mukaisella tila-avaruudella varustetun homogeenisen Markovin ketjun tasapainojakauma on ylärivin mukainen, ja esimerkki tällaisesta ketjusta.

	ei ole olemassa	on, yksikäsitteinen	on, ei yksikäsi.
$X = \{0, \dots, K\}$			
$\#X = \infty$			