

Stochastic Modeling

Exercises 30.10.2007

-7-

- (1) Let $(f_i)_{i=0}^\infty$ be a homogeneous irreducible Markov chain starting in $k \in X$ and let k be positive persistent. Let

$$\begin{aligned} T_0 &:= 0 \\ T_1 &:= \inf \{i > 0 | f_i = k\}, \\ T_2 &:= \inf \{i > T_1 | f_i = k\}, \\ T_3 &:= \dots \end{aligned}$$

- (a) Show that $T_2 - T_1$ and T_1 are independent.

Hint: Show that $\mathbb{P}(T_2 - T_1 = l | T_1 = m) = \mathbb{P}(T_2 - T_1 = l)$.

- (b) Show that $(T_i - T_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots$ are independent.

Hint: Show that $\mathbb{P}(T_{n+1} - T_n = x_{n+1} | \bigcap_{i=1}^n \{(T_i - T_{i-1}) = x_i\}) = \mathbb{P}(T_{n+1} - T_n = x_{n+1})$.

Use $\{f_{T_n} = k\} = \Omega$, the relation

$\bigcap_{i=1}^n \{(T_i - T_{i-1}) = x_i\} = \{T_1 = x_1\} \cap \{T_2 = x_1 + x_2\} \cap \dots \cap \{T_n = x_1 + \dots + x_n\}$ and the strong Markov property (Proposition 3.6.1).

- (c) Show using the *Strong Law of Large Numbers*:

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega : \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m(\omega)}{m} = \mathbb{E}T_1 \right\} \right) = 1,$$

- (d) (Proposition 3.7.16) Show that

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_k(n)}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}T_1} \right\} \right) = 1.$$

Hint: Show that $T_{N_k(n)} \leq n < T_{N_k(n)+1}$.

- (2) Given a homogeneous Markov chain with state space X and with communicating states $k, l \in X$ one shows: If k is persistent, then l is persistent as well.

- (3) Assume a homogeneous Markov chain $(f_i)_{i=0}^\infty$ with state space $X = \{0, \dots, N\}$ and transition matrix

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+1} & \cdots & \frac{1}{N+1} \\ \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+1} & \cdots & \frac{1}{N+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+1} & \cdots & \frac{1}{N+1} \end{pmatrix}$$

Show that each state $k \in X$ is persistent.

Stokastiset mallit
Harjoitukset 30.10.2007
-7-

- (1) Olkoon $(f_i)_{i=0}^\infty$ homogeeninen pelkistymätön Markovin ketju, $k \in X$ positiivinen palautuva (positive persistent) ja $\mathbb{P}(f_0 = k) = 1$. Määritellään funktiot T_i kaavoilla

$$\begin{aligned} T_0 &:= 0, \\ T_1 &:= \inf \{i > 0 \mid f_i = k\}, \\ T_2 &:= \inf \{i > T_1 \mid f_i = k\}, \\ T_3 &:= \dots \end{aligned}$$

- (a) Osoita, että $T_2 - T_1$ ja T_1 ovat riippumattomat.

Vihje: Osoita, että $\mathbb{P}(T_2 - T_1 = l \mid T_1 = m) = \mathbb{P}(T_2 - T_1 = l)$.

- (b) Osoita, että $(T_i - T_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots$ ovat riippumattomat.

Vihje: Osoita, että $\mathbb{P}(T_{n+1} - T_n = x_{n+1} \mid \bigcap_{i=1}^n \{(T_i - T_{i-1}) = x_i\}) = \mathbb{P}(T_{n+1} - T_n = x_{n+1})$.

Käytä $\{f_{T_n} = k\} = \Omega$ ja

$\bigcap_{i=1}^n \{(T_i - T_{i-1}) = x_i\} = \{T_1 = x_1\} \cap \{T_2 = x_1 + x_2\} \cap \dots \cap \{T_n = x_1 + \dots + x_n\}$ ja vahvaa Markovin ominaisuutta (Lause 3.6.1).

- (c) Osoita seuraava käyttämällä vahvaa suurten lukujen lakia (the Strong Law of Large Numbers):

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega : \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m(\omega)}{m} = \mathbb{E}T_1 \right\} \right) = 1,$$

- (d) (Lause 3.7.16) Osoita, että

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_k(n)}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}T_1} \right\} \right) = 1.$$

Vihje: Osoita, että $T_{N_k(n)} \leq n < T_{N_k(n)+1}$.

- (2) Olkoon X homogeenisen Markovin ketjun tila-avaruus ja tilat $k, l \in X$ kommunikoivia. Todista väite: Jos k on palautuva, niin myös l on palautuva.

- (3) Olkoot $(f_i)_{i=0}^\infty$ homogeeninen Markovin ketju, $X = \{0, \dots, N\}$ sen tila-avaruus ja

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+1} & \dots & \frac{1}{N+1} \\ \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+1} & \dots & \frac{1}{N+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+1} & \dots & \frac{1}{N+1} \end{pmatrix}$$

siirtymämatriisi. Osoita, että $k \in X$ on palautuva.

Summary

The homogeneous Markov chain has a stationary distribution:
Give (if possible) sufficient conditions and an example for each case.

	no	a unique one	more than one
$X = \{0, \dots, K\}$			
$\#X = \infty$			

Tiivistelmä

Anna (jos mahdollista) kaikissa taulukon kuudessa tapauksessa riittävät ehdot sille, että taulukon vasemman sarakkeen mukaisella tila-avaruudella varustetun homogeenisen Markovin ketjun tasapainojakauma on ylärivin mukainen, ja esimerkki tällaisesta ketjusta.

	ei ole olemassa	on, yksikäsitteinen	on, ei yksikäsi.
$X = \{0, \dots, K\}$			
$\#X = \infty$			