Stefan Geiß

Stokastiset differentiaaliyhtälöt
Harjoitus 9 (17. marraskuuta 2003)

(1) Olkoon $M = (M_t)_{t\geq 0}$ martingaali siten, että kaikki polut ovat oikealta jatkuvia ja vasemman puoleiset raja-arvot ovat olemassa. Osoita, että

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |M_t|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|M_T|^p$$

kaikille $1 < p < \infty$ ja $T > 0$, jos $\mathbb{E}|M_T|^p < \infty$.

Vihje: Voit käyttää Lausetta 4.8 (Doobin epäyhtälö).

(2*) Olkoot $f, f_1, f_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia siten, että $f_n \sim N(0, \sigma_n)$, $\sigma_n \geq 0$, ja $\lim_n \mathbb{E}|f_n - f|^2 = 0$. Osoita, että f on Gaussinen satunnaismuuttuja.

Vihje: Fourier-muutos.

(3) Olkoon $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että $\int_0^t f(u)dB_u$ on Gaussinen satunnaismuuttuja. Laske keskiarvo ja varianssi. Onko $X = (X_t)_{t\geq 0}$, missä $X_t := \int_0^t f(u)dB_u$, Gaussinen prosessi?

(4) Olkoot $Y_n, Z_n, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia. Osoita, että $Y_n Z_n \to 0$ m.v., jos $Y_n \to 0$ m.v. ja $Z_n \to_n Z$ stokastisesti ($\mathbb{P}(|Z_n - Z| > \varepsilon) \to_n 0$ kaikille $\varepsilon > 0$).

(5) Olkoot $T > 0$ ja $0 = t_0^{(n)} \leq \cdots \leq t_n^{(n)} = T$ siten, että

$$\lim_n \max_{i=1,\ldots,n} |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}| = 0 \text{ ja } V_p^{(n)}(\omega) := \left(\sum_{i=1}^n |B_{t_i^{(n)}}(\omega) - B_{t_{i-1}^{(n)}}(\omega)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Osoita, että $\lim_n \mathbb{E}(V_p^{(n)})^2 = \infty$, jos $0 < p < 2$, ja $\lim_n \mathbb{E}(V_q^{(n)})^2 = 0$, jos $2 < q < \infty$.

Vihje: $(\mathbb{E}|Z|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}|Z|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\mathbb{E}|Z|^q)^{\frac{1}{q}}$.