Stefan Geiß

Stokastiset differentiaaliyhtälöt

Harjoitus 11 (1. joulukuuta 2003)

(1) Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja

$$X_t := xt + (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s},$$

missä $t \in [0,1)$. Osoita, että

(a) $\lim_{t\uparrow 1} \mathbb{E}X_t^2 = x^2$, ja

(b) $dX_t = dB_t + \frac{x-X_t}{1-t}dt$, jos $t \in [0,1)$.

Vihje: Voit käyttää tietoa, että $'dB_u ds = ds dB_u'$.

(2) Olkoot $L = (L_t)_{t\geq 0}$ progressiivisesti mitallinen prosessi siten, että

$$\sup_{t\geq 0, \omega\in\Omega} |L_t(\omega)| \leq 1,$$

ja

$$X_u := \int_0^u L_v dB_v.$$

Osoita, että

(a) $\mathbb{E}(X_t - X_s)^4 \leq c_4^4 (t-s)^2$,

(b) $\mathbb{E}\left((X_t-X_s)^2 - \int_s^t L_u^2 du\right)^2 \leq (c_4^4+1)(t-s)^2$,

jos $0 \leq s \leq t < \infty$. **Vihje:** Käytä Burkholder-Davis-Gundy epäyhtälöä

$$\left(\mathbb{E}\left|\int_s^t L_u dB_u\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_p \left(\mathbb{E}\left(\int_s^t L_u^2 du\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}},$$

missä $1 < p < \infty$.

(3) Olkoot $\Omega := \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N) : \varepsilon_k = \pm 1\}$ ja $\varphi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ siten, että $\varphi_0 := 0$ ja $\varphi(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) := \varepsilon_k$, jos $k \in \{1, ..., N\}$. Määrittelemme historian $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_k := \sigma(\varphi_1, ..., \varphi_k)$ jos $k \in \{1, ..., N\}$ ja mitan $\mathbb{P}(\{\omega\}) := \frac{1}{2^N}$. Lisäksi, olkoot $c \in \mathbb{R}$ ja

$$X_k := [\varphi_0 + \cdots + \varphi_k] + ck.$$

Mille $c \in \mathbb{R}$ on olemassa ekvivalentti mitta Q (se tarkoittaa, että $Q(B) = 0$, jos ja vain jos $\mathbb{P}(B) = 0$) siten, että $(X_k)_{k=0}^N$ on martingaali stokastisen kentän $(\Omega, \mathcal{F}_N, Q, (\mathcal{F}_k)_{k=0}^N)$ suhteen?