Stefan Geiß

# Stokastiset differentiaaliyhtälöt

## Harjoitus 1 (15. syyskuuta 2003)

(1) Olkoot $d \geq 1$ ja
$$\mathcal{A} := \otimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$
pienin $\sigma$-algebra joka sisältää kaikki joukot
$$A := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \cdots ,$$
missä $n \in \{1, 2, ...\}$ ja $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,..., $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Lisäksi, olkoon $X = (X_t)_{t \geq 0}$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$, stokastinen prosessi. Osoita, että $B \in \sigma(X_s : s \in [0, t])$ jos ja vain jos on olemassa $t_1, t_2, ... \in [0, t]$ ja $A \in \mathcal{A}$ siten, että
$$B = \{\omega \in \Omega : (X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega), ...) \in A\} .$$

(2) Olkoot $\Omega := [0, 2)$ ja $\mathcal{F}$ pienin $\sigma$-algebra joka sisältää kaikki joukot $\{t\}$, missä $t \in (1, 2)$. Osoita, että $[0, 1] \notin \mathcal{F}$.

(3) Olkoot $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $X = (X_t)_{t \geq 0}$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$, stokastinen prosessi siten, että kaikki polut $t \to X_t(\omega)$ ovat oikealta jatkuvia ja vasemman puoleiset raja-arvot ovat olemassa kaikille $\omega \in \Omega$. Osoita, että
$$\{\omega \in \Omega : t \to X_t(\omega) \quad \text{on jatkuva}\} \in \mathcal{F}.$$

(4) Olkoot $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus historian $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ suhteen ja $X = (X_t)_{\geq 0}$ prosessi joka on $\mathbb{F}$-sopiva ja jonka polut ovat jatkuvia kaikille $\omega \in \Omega$. Olkoot $t_0 > 0$ ja $A \subseteq \Omega$ on tapahtumien $\omega \in \Omega$ joukko siten, että
$$\sup_{|t - t_0| \leq \varepsilon(\omega)} X_t(\omega) \leq X_{t_0}(\omega)$$
jollekin $\varepsilon(\omega) > 0$. Onko totta, että
$$A \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t_0 + \varepsilon}?$$