Stokastiset differentiaaliyhtälöt

Harjoitus 9 (12. Maaliskuuta 2007)

Tehtävät:

(1) Olkoon $S_t = e^{B_t - \frac{t}{2}}$. Etsi differentiaaliyhtälö prosessille $X_t := 1/S_t$.

(2) Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja

$$X_t := xt + (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s},$$

missä $t \in [0,1)$. Osoita, että

(a) $\lim_{t\uparrow 1} \mathbb{E}X_t^2 = x^2$, ja

(b) $dX_t = dB_t + \frac{x - X_t}{1-t}dt$, jos $t \in [0,1)$.

Vihje: Voit käyttää tietoa, että $'dB_u ds = ds dB_u'$.

(3) Olkoot $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} := \mathcal{B}([0,1])$ ja $\mathbb{P}$ Lebesgue-mitta. Määritellään $M_k := 2^k \chi_{\left\{\left[0,\frac{1}{2^k}\right]\right\}}$ ja $\mathcal{G}_k := \sigma(M_0, ..., M_k)$ missä $k = 0, 1, 2, ...$

(a) Osoita, että $(M_k)_{k=0}^{\infty}$ on martingaali historian $(\mathcal{G}_k)_{k=0}^{\infty}$ suhteen.

(b) Laske $\mathbb{E}M_k$.

(c) Laske $\lim_n \mathbb{E}\left(d_1^2 + \cdots + d_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$, missä $d_k := M_k - M_{k-1}$.

Mitä kohtien (b) ja (c) tulokset tarkoittavat?

(4) Osoita Lemma 3.3.1.