Stefan Geiß

Stokastiset differentiaaliyhtälöt

Harjoitus 1 (15. Tammikuuta 2007)
10:15-12:00 MaD 355

(1) Olkoot $d \geq 1$ ja
$$\mathcal{A} := \otimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$
pienin σ-algebra joka sisältää kaikki joukot
$$A := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \cdots ,$$
missä $n \in \{1, 2, ...\}$ ja $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,..., $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Lisäksi, olkoon $X = (X_t)_{t\geq 0}$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$, stokastinen prosessi. Osoita, että $B \in \sigma(X_s : s \in [0,t])$ jos ja vain jos on olemassa $t_1, t_2, ... \in [0,t]$ ja $A \in \mathcal{A}$ siten, että
$$B = \{\omega \in \Omega : (X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega), ...) \in A\} .$$

(2) Olkoot $\Omega := [0, 2)$ ja $\mathcal{F}$ pienin σ-algebra joka sisältää kaikki joukot $\{t\}$, missä $t \in (1, 2)$. Osoita, että $[0, 1] \notin \mathcal{F}$.

(3) Olkoot $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $X = (X_t)_{t\geq 0}$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$, stokastinen prosessi siten, että kaikki polut $t \to X_t(\omega)$ ovat oikealta jatkuvia ja vasemman puoleiset raja-arvot ovat olemassa kaikille $\omega \in \Omega$. Osoita, että
$$\{\omega \in \Omega : t \to X_t(\omega) \quad \text{on jatkuva}\} \in \mathcal{F}.$$

(4) Olkoot $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus historian $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ suhteen ja $X = (X_t)_{\geq 0}$ prosessi joka on $\mathbb{F}$-sopiva ja jonka polut ovat jatkuvia kaikille $\omega \in \Omega$. Olkoot $t_0 > 0$ ja $A \subseteq \Omega$ on tapahtumien $\omega \in \Omega$ joukko siten, että
$$\sup_{|t-t_0|\leq\varepsilon(\omega)} X_t(\omega) \leq X_{t_0}(\omega)$$
jollekin $\varepsilon(\omega) > 0$. Onko totta, että
$$A \in \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t_0+\varepsilon}?$$

Stochastic Differential Equations

Exercises 1 (15th of January 2007)
10:15-12:00 MaD 355

(1) Let $d \geq 1$ and define
$$\mathcal{A} := \otimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$
the smallest σ-algebra which contains all sets
$$A := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \cdots ,$$
where $n \in \{1, 2, ...\}$ an $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,..., $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Moreover, let $X = (X_t)_{t \geq 0}$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$, be a stochastic process. Show that $B \in \sigma(X_s : s \in [0, t])$ if and only if there exist $t_1, t_2, ... \in [0, t]$ and $A \in \mathcal{A}$ such that
$$B = \{\omega \in \Omega : (X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega), ...) \in A\}.$$

(2) Let $\Omega := [0, 2)$ and let $\mathcal{F}$ be the smallest σ-algebra which contains all 'one point sets' $\{t\}$, for $t \in (1, 2)$. Show that $[0, 1] \notin \mathcal{F}$.

(3) Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space and $X = (X_t)_{t \geq 0}$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ a stochastic process such that the paths $t \to X_t(\omega)$ are right continuous and have left limits for all $\omega \in \Omega$. Show that
$$\{\omega \in \Omega : t \to X_t(\omega) \quad \text{is continuous}\} \in \mathcal{F}.$$

(4) Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ a filtration and $X = (X_t)_{\geq 0}$ a stochastic process $\mathbb{F}$-adapted whose paths are continuous for all $\omega \in \Omega$. Let $t_0 > 0$ and $A \subseteq \Omega$ the set of all $\omega \in \Omega$ such that
$$\sup_{|t - t_0| \leq \varepsilon(\omega)} X_t(\omega) \leq X_{t_0}(\omega)$$
for some $\varepsilon(\omega) > 0$. Is it true that
$$A \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t_0 + \varepsilon}?$$

For information about Borel $\sigma-$algebras etc see, for example,
www.math.jyu.fi/∼geiss/scripts/introduction-probability.pdf