Stefan Geiß

Todennäköisyysteoria

Harjoitus 2 (17. helmikuuta 2003)

(1) Olkoot $\Omega := [0,1]$, $\mathcal{F} := \mathcal{B}([0,1])$ ja $\mathbb{P} = \lambda$ Lebesguen mitta. Määrittelemme funkiota $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$f_{2n}(t) := n^3 \chi_{[0,1/2n]}(t) \quad \text{ja} \quad f_{2n-1}(t) := n^3 \chi_{[1-1/2n,1]}(t)$$

missä $n = 1, 2, ...$

(a) Onko olemassa satunnaismuuttuja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ siten, että $f_n \to f$ melkein varmasti?

(b) Onko olemassa satunnaismuuttuja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ siten, että $f_n \to_{\mathbb{P}} f$?

(c) Onko olemassa satunnaismuuttuja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ja $1 \le p < \infty$ siten, että $f_n \to_{L_p} f$?

(2) Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja siten, että $f(\omega) \ge 0$ kaikille $\omega \in \Omega$. Osoita, että $\int_\Omega f(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = 0$ jos ja vain jos $\mathbb{P}(\omega : f(\omega) \ne 0) = 0$.

(3) Osoita, että $\mathbb{P}(\omega : f(\omega) = g(\omega)) = 1$, jos $f_n \to_{\mathbb{P}} f$ ja $f_n \to_{\mathbb{P}} g$.

(4) Osoita, että $\mathbb{P}(|f_n - g_n| > \varepsilon) \to_n 0$ kaikille $\varepsilon > 0$, jos $f_n \to_{\mathbb{P}} f$ ja $g_n \to_{\mathbb{P}} f$.

(5) Osoita, että $f_n + g_n \to_{\mathbb{P}} f + g$, jos $f_n \to_{\mathbb{P}} f$ ja $g_n \to_{\mathbb{P}} g$.

(6) Osoita, että $f_n^2 \to_{\mathbb{P}} f^2$, jos $(f_n - f)^2 \to_{\mathbb{P}} 0$.

(7) Olkoot $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia $0 < p < \infty$ siten, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|f_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega |f_n(\omega)|^p d\mathbb{P}(\omega) < \infty.$$

Osoita, että $f_n \to 0$ melkein varmasti.

Vihje: Käytä Borel-Cantellin lemmaa ja Chebychev:in epäyhtälöä.