Todennäköisyysteoria 1
Harjoitus 8
Torstaina 12.03.09 16:15–17:45 (MaD 380)

(1) Olkoon $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ todennäköisyysavaruus. Määritellään funktiot $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ kaavoilla

$$f_{2n}(x) := n^3 1\!\!\mathrm{I}_{[0,1/2n]}(x) \quad \text{ja} \quad f_{2n-1}(x) := n^3 1\!\!\mathrm{I}_{[1-1/2n,1]}(x),$$

missä $n = 1, 2, \dots$.

(a) Onko olemassa satunnaismuuttuja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ siten, että $f_n \to f$ melkein varmasti?

(b) Onko olemassa satunnaismuuttuja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ siten, että $f_n \xrightarrow{\mathbb{P}} f$?

(c) Onko olemassa satunnaismuuttuja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ siten, että $f_n \xrightarrow{L_P} f$?

(2) Osoita Hölderin epäyhtälöä käyttäen, että $\mathbb{E}|f|^p < \infty \Longrightarrow \mathbb{E}|f|^r < \infty$ kaikilla $0 < r \le p$.

(3) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Määritellään välin $[0,1]$ σ–algebra

$$\mathcal{F} := \sigma\left\{\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \ k = 0, 1, \dots, n-1\right\}$$

(a) Miksi funktio $f(x) = x, \quad x \in [0,1]$ ei ole $\mathcal{F}$–mitallinen?

(b) Anna esimerkki $\mathcal{F}$–mitallisesta funktiosta.

(4) Olkoon $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ jono riippumattomia ja samoin jakautuneita (i.i.d.) satunnaismuuttujia siten, että $\mathbb{E}f_1 = m$ ja varianssi $\sigma^2 = \mathbb{E}(f_1 - m)^2$. Osoita keskeistä raja-arvolausetta käyttäen, että

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega : \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right\}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

kun $n \to \infty$.

(5) Olkoon $\mathcal{G} := \sigma\{(a,b), \ 0 < a < b < 1\}$ välin $[0,1]$ σ-algebra. Mitkä jatkuvat funktiot $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ovat $\mathcal{G}$-mitallisia?

(6) Olkoot $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

(a) Olkoon $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$. Osoita, että f on mitallinen jos ja vain jos f on vakio.

(b) Olkoot $\mathbb{P}(A)$ on 0 tai 1 jokaiselle $A \in \mathcal{F}$ ja f on mitallinen. Osoita, että

$$\mathbb{P}(\{\omega : f(\omega) = c\}) = 1 \text{ jollekin vakiolle } c.$$

Probability Theory 1

Exercises 8

Thursday 12.03.09 16:15–17:45 (MaD 380)

(1) Assume the proability space $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Define the functions $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ by

$$f_{2n}(x) := n^3 \mathbb{1}_{[0,1/2n]}(x) \quad \text{and} \quad f_{2n-1}(x) := n^3 \mathbb{1}_{[1-1/2n,1]}(x),$$

where $n = 1, 2, \ldots$.

(a) Does there exist a random variable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ such that $f_n \to f$ almost surely?

(b) Does there exist a random variable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ such that $f_n \xrightarrow{\mathbb{P}} f$?

(c) Does there exist a random variable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ such that $f_n \xrightarrow{L_p} f$?

(2) Use Hölder's inequality to show that $\mathbb{E}|f|^p < \infty \Longrightarrow \mathbb{E}|f|^r < \infty$ for all $0 < r \le p$.

(3) Let $n \in \mathbb{N}$. Define a σ–algebra on $[0,1]$ by

$$\mathcal{F} := \sigma\left\{ \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \ k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

(a) Why is the function $f(x) = x, \quad x \in [0,1]$ not $\mathcal{F}$–measurable?

(b) Give an example of a function which is $\mathcal{F}$–measurable?

(4) Let $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ be a sequence of independent identically distributed (i.i.d.) random variables such that $\mathbb{E}f_1 = m$ and $\sigma^2 = \mathbb{E}(f_1 - m)^2$. Show using the *Central limit theorem* that

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega : \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right\}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

for $n \to \infty$.

(5) Let $\mathcal{G} := \sigma\{(a,b), \ 0 < a < b < 1\}$ be a σ-algebra on $[0,1]$. Which continuous functions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ are $\mathcal{G}$-measurable?

(6) Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space and $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

(a) Let $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$. Show that f is measurable if and only if f is constant.

(b) Let $\mathbb{P}(A)$ be either 0 or 1 for all $A \in \mathcal{F}$ and assume that f is measurable. Show that

$$\mathbb{P}(\{\omega : f(\omega) = c\}) = 1 \text{ for some constant } c.$$