

## Probability 3

### Exercises 5 (12th of December 2007)

$f_n \rightarrow_d f$	heikko konvergenssi tai konvergenssi jakaumaltaan	jono $(f_n)_{n \geq 1}$ konvergoi jakaumaltaan tai heikosti kohti funktiota $f$
$\mu_n \Rightarrow \mu$	heikko konvergenssi	jono $(\mu_n)_{n \geq 1}$ konvergoi heikosto kohti mitta $\mu$

Solve 4 of the 5 problems:

- (1) Olkoot  $f_k, f, g_k, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  satunnaismuuttujia siten, että  $f_k$  ja  $g_k$  ovat riippumattomia, ja  $f$  ja  $g$  ovat riippumattomia. Oletetaan, että  $f_k$  konvergoi jakaumaltaan kohti funktiota  $f$  ja  $g_k$  samassa mielessä kohti funktiota  $g$ . Osoita, että  $f_k + g_k$  konvergoi myös jakaumaltaan kohti funktiota  $f + g$ .

**Vihje:** Fourier-muunnos.

- (2) Olkoot  $\Omega := \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$  ja  $\mu_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , todennäköisyysmittoja. Osoita, että  $\mu_n \Rightarrow \delta_0$  jos ja vain jos

$$\lim_n \mu_n((-\varepsilon, \varepsilon)) = 1$$

kaikille  $\varepsilon > 0$ .

- (3) Mitta  $\mu_n^{(p)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} \delta_{\{k\}} \in \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R})$ ,  $0 < p < 1$ , määrittelee binomi-jakauman avaruudessa  $\mathbb{R}$ . Laske Fourier-muunnoksen avulla

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu_n^{(p)}(x).$$

- (4) Olkoot  $\sigma > 0$  ja  $\gamma_{0,\sigma^2} \in \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R})$  Gaussinen mitta, jolla on tiheysfunktio  $p_{0,\sigma^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ . Laske Fourier-muunnoksen avulla

(a)  $\int_{\mathbb{R}} x^4 d\gamma_{0,\sigma^2}(x)$ ,

(b\*)  $\int_{\mathbb{R}} x^n d\gamma_{0,\sigma^2}(x)$ ,  $n = 2, 4, 6, \dots$

- (5) Gamma-jakauma: Olkoon  $t > 0$  ja määrittellään mitta  $\mu_t$  kaavalla

$$\mu_t(B) := \int_B \chi_{(0,\infty)}(y) y^{t-1} e^{-y} \frac{dy}{\Gamma(t)},$$

missä  $\Gamma(t) := \int_0^\infty y^{t-1} e^{-y} dy$ . Jos satunnaismuuttujan  $X$  jakauma on  $\mu_t$ , niin sanotaan, että  $X$  on Gammajakautunut parametrilla  $t$ .

(a) Osoita, että

$$\frac{d}{dx}\hat{\mu}_t(x) = -\frac{t}{x+i}\hat{\mu}_t(x).$$

**Vihje:**

- Derivoi  $\hat{\mu}_t(x)$  ja vaihda derivoinnin ja integroinnin järjestystä.
- Integraalin sisään tulee  $y^t$ . Muuta osittaisintegroitin avulla  $y^t$  lausekkeksi  $y^{t-1}$ .

(b) Ratkaise formaalisti kohdan a) differentiaaliyhtälö.