

Probability 2
Exercises 12 (30. November 2006)

- (1) Mitta $\mu_n^{(p)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} \delta_{\{k\}} \in \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R})$, $0 < p < 1$, määrittelee binomi-jakauman avaruudessa \mathbb{R} . Laske Fourier-muunnoksen avulla

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu_n^{(p)}(x).$$

- (2) Olkoot $\sigma > 0$ ja $\gamma_{0,\sigma^2} \in \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R})$ Gaussinen mitta, jolla on tiheysfunktio $p_{0,\sigma^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Laske Fourier-muunnoksen avulla

(a) $\int_{\mathbb{R}} x^4 d\gamma_{0,\sigma^2}(x)$,

(b*) $\int_{\mathbb{R}} x^n d\gamma_{0,\sigma^2}(x)$, $n = 2, 4, 6, \dots$

- (3) Osoita, että $\mathbb{E}fg = \mathbb{E}f\mathbb{E}g$, jos $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ovat riippumattomia mitallisia porrask-funktioita.

- (4) Olkoon $\mu \in \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}^d)$ Gaussinen mitta siten, että

$$\int_{\mathbb{R}^d} x_k d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} x_j x_l d\mu(x) = 0$$

kaikille $k, j, l \in \{1, \dots, d\}$ missä $j \neq l$. Osoita, että satunnaismuuttujat $f_1, \dots, f_d : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x_1, \dots, x_d) := x_k$ ovat riippumattomia jos käytämme todennäköisyysavaruutta $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$.

- (5*) Gamma-jakauma: Olkoon $t > 0$ ja määrittellään mitta μ_t kaavalla

$$\mu_t(B) := \int_B \chi_{(0,\infty)}(y) y^{t-1} e^{-y} \frac{dy}{\Gamma(t)},$$

missä $\Gamma(t) := \int_0^\infty y^{t-1} e^{-y} dy$. Jos satunnaismuuttujan X jakauma on μ_t , niin sanotaan, että X on Gammajakautunut parametrilla t .

- (a) Osoita, että

$$\frac{d}{dx} \hat{\mu}_t(x) = -\frac{t}{x+i} \hat{\mu}_t(x).$$

Vihje:

- Derivoi $\hat{\mu}_t(x)$ ja vaihda derivoinnin ja integroinnin järjestystä.
- Integraalin sisään tulee y^t . Muuta osittaisintegrointin avulla y^t lausekkeksi y^{t-1} .

- (b) Ratkaise formaalisti kohdan a) differentiaaliyhtälö.