Christel Geiss (chgeiss@maths.jyu.fi)

Johdatus todennäköisyysteoriaan

Harjoitus 4 (6/10/2003)
MaD 380, 10:15-11:45

Tehtävät:

(1) (a) Olkoot $\Omega := \{1, ..., 6\}$, $\mathcal{F} := 2^\Omega$ ja $\mathbb{P}(B) := \frac{1}{6}\mathrm{card}(B)$. Määritellään $A := \{1, 4\}$ ja $B := \{2, 5\}$. Ovatko joukot A ja B riippumattomia?

(b) Olkoot $\Omega := \{(k, l) : k, l = 1, ..., 6\}$, $\mathcal{F} := 2^\Omega$ ja $\mathbb{P}(B) := \frac{1}{36}\mathrm{card}(B)$. Asetetaan

$$A := \{(k, l) : k = 1 \text{ tai } k = 4\} \quad \text{ja} \quad B := \{(k, l) : l = 2 \text{ tai } l = 5\}.$$

Ovatko joukot A ja B riippumattomia?

(2) Tietyllä paikkakunnalla 60% perheistä omistaa auton, 30 % omistaa talon ja 20% omistaa molemmat (oman auton ja oman kodin). Jos perhe valitaan satunnaisesti, mikä on todennäköisyys, että perhe omistaa auton tai talon, mutta ei molempia?

(3) Pelaamme seuraavaa peliä: Meillä on noppia siten, että kaikkien lukujen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ todennäköisyys on $\frac{1}{6}$. Olkoot $k_1, k_2, ... \in \{1, 2, 3, ...\}$.

(a) Ensimmäinen vuoro: pelaamme k_1 noppalla. Jos saamme k_1 kertaa luvun 6 olemme voittaneet.

(b) Toinen vuoro: pelaamme k_2 noppalla. Jos saamme k_2 kertaa luvun 6 olemme voittaneet.

Ja niin edelleen... Osoita, että

(a) voitamme ääretön monta kertaa jos ja vain jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{k_n} = \infty,$$

(b) ja riippumatta jonon $(k_n)_n$ valinnasta me häviämme ääretön monta kertaa todennäköisyydellä 1.

Vihje: Käytä Borel-Cantellin lemmaa.

(4) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $A \subseteq \Omega$ joukko. Osoita, että $A \in \mathcal{F}$ jos ja vain jos $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on satunnaismuuttuja, missä

$$f(\omega) := \begin{cases} 1 & : \quad \omega \in A \\ 0 & : \quad \omega \notin A \end{cases} .$$

(5) Osoita Lauseen 1.6 (properties of random variables) kohdat (1), (3) ja (4).

(6) Oletetaan, että meillä on 10 kolikkoa, joista i:nen kolikon heitto tuottaa tuottaa kruunan todennäköisyydellä $\frac{i}{10}$, $i = 1, 2, \ldots, 10$. Valitaan satunnaisesti yksi kolikko. Mikä on ehdollinen todennäköisyys sille, että viides kolikko on valittu, kun tiedetään, että heiton tulos oli kruuna? **Vihje:** Käytä Bayesin kaavaa.

(7) Olkoot $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

(a) Olkoon $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$. Osoita, että f on mitallinen jos ja vain jos f on vakio.

(b) Olkoot $\mathbb{P}(A)$ on 0 tai 1 jokaiselle $A \in \mathcal{F}$ ja f on mitallinen. Osoita, että

$$\mathbb{P}(\{\omega : f(\omega) = c\}) = 1 \text{ jollekin vakiolle } c.$$