

Johdatus todennäköisysteoriaan

Harjoitus 9 (10/11/2003)

MaD 380, 10:15-11:45

Tehtävät:

- (1) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja f_1, f_2, \dots ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Osoita, että

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} f_k \quad (\leq \infty).$$

- (2) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus, $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$ riippumattomia satunnaismuuttujia ja $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mitallisia funktioita. Osoita, että $g_1(f_1), g_2(f_2), \dots, g_n(f_n)$ ovat riippumattomia.

- (3) Osoita Minkowskin epäyhtälöä käyttäen, että reaalilukujonoille $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ pätee kaikilla $1 \leq p < \infty$ kaava

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- (4) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Määritellään välin $[0, 1]$ σ -algebra

$$\mathcal{F} := \sigma \left\{ \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] , k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

- (a) Miksi funktio $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$ ei ole \mathcal{F} -mitallinen?
(b) Anna esimerkki \mathcal{F} -mitallisesta funktiosta.
- (5) Olkoon $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ jono riippumattomia ja samoin jakautuneita (i.i.d.) satunnaismuuttujia siten, että $\mathbb{E} f_1 = m$ ja varianssi $\mathbb{E}(f_1 - m)^2 = \sigma^2$. Osoita keskeistä raja-arvolausetta käyttäen, että

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega : \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} \leq x \right\} \right) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

kun $n \rightarrow \infty$.