Christel Geiss

Johdatus todennäköisyysteoriaan

Harjoitus 1 (15/09/2003)
MaD 380, 10:15-11:45

Määritelmä:

(1) Olkoon $\Omega \neq \emptyset$. Joukon Ω potenssijoukko 2^Ω on Ω:n kaikkien osajoukkojen ($\emptyset$ ja Ω mukaan lukien) perhe.

(2) Joukkoperhe $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ on *monotoninen luokka*, jos

   (a) $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \Longrightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$, ja
   (b) $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \Longrightarrow \bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$.

Lisäksi, kuten luennoilla $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ merkitään Borel:in σ-algebraa.

Tehtävät:

---

(1) Osoita, että $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(2) Osoita, että $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$ missä $A_i \subseteq \Omega$ ja I on mielivaltainen indeksi-joukko.

(3) Olkoot Ω joukko ja $A, B \subseteq \Omega$ epätyhjiä osajoukkoja, missä $A \cap B = \emptyset$. Anna kaikki σ-algebran $\sigma(A, B)$ elementit, missä $\sigma(A, B)$ on pienin σ-algebra joka sisältää joukot A ja B.

(4) Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Käyttämättä Lausetta 1.1.8 (eli tietoa $\sigma(\mathcal{G}_0) = \sigma(\mathcal{G}_1) = \sigma(\mathcal{G}_5)$) osoita että $\{x\} \in \sigma(\mathcal{G}_5)$, missä $\{x\}$ on joukko, joka sisältää vain luvun x.

(5) Olkoon $Q \subset \mathbb{R}$ rationaali lukuja. Onko totta, että $Q \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

Vihje: Käytä tehtävää 4, Lausetta 1.1.8 ja σ-algebran omaisuuksia.

---

(6) Olkoot kaksi noppaa siten, että kaikkien lukujen $\{1, 2, ..., 6\}$ todennäköisyys on $\frac{1}{6}$. Laske todennäköisyys, että noppin silmälukujen summa on $m \in \{2, 3, ..., 12\}$.

tai

(7) Kolme opiskelijaa on salissa. Laske todennäköisyys, että vähintään kahdella opiskelijoilla on syntymäpäivä samana päivänä (vuodessa on 365 päivää ...).

(8*) Osoita, että perhe $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$, joka on *algebra* ja *monotoninen luokka*, on σ-algebra.