Todennäköisyysteoria 1

Harjoitus 9 (15.03.07)
MaD 355, 08:30–10:00

(1) Olkoon $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ todennäköisyysavaruus. Määritellään funktiot $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ kaavoilla

$$f_{2n}(x) := n^3 \mathbb{1}_{[0,1/2n]}(x) \quad \text{ja} \quad f_{2n-1}(x) := n^3 \mathbb{1}_{[1-1/2n,1]}(x),$$

missä $n = 1, 2, \dots$.

(a) Onko olemassa satunnaismuuttuja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ siten, että $f_n \to f$ melkein varmasti?

(b) Onko olemassa satunnaismuuttuja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ siten, että $f_n \xrightarrow{\mathbb{P}} f$?

(c) Onko olemassa satunnaismuuttuja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ siten, että $f_n \xrightarrow{L_P} f$?

(2) Osoita Minkowskin epäyhtälöä käyttäen, että reaalilukujonoille $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ pätee kaikilla $1 \leq p < \infty$ kaava

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(3) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Määritellään välin $[0,1]$ σ–algebra

$$\mathcal{F} := \sigma \left\{ \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] , \, k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

(a) Miksi funktio $f(x) = x, \quad x \in [0,1]$ ei ole $\mathcal{F}$–mitallinen?

(b) Anna esimerkki $\mathcal{F}$–mitallisesta funktiosta.

(4) Olkoon $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ jono riippumattomia ja samoin jakautuneita (i.i.d.) satunnaismuuttujia siten, että $\mathbb{E} f_1 = m$ ja varianssi $\sigma^2 = \mathbb{E}(f_1 - m)^2$. Osoita keskeistä raja-arvolausetta käyttäen, että

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega : \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} \leq x \right\} \right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

kun $n \to \infty$.

(5) Olkoon $((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$ todennäköisyysavaruus. Laske

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!} \right]}.$$

Probability Theory 1

Exercises 9 (15.03.07)
MaD 355, 08:30–10:00

(1) Assume the proability space $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Define the functions $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ by

$$f_{2n}(x) := n^3 \mathbb{I}_{[0,1/2n]}(x) \quad \text{and} \quad f_{2n-1}(x) := n^3 \mathbb{I}_{[1-1/2n,1]}(x),$$

where $n = 1, 2, \ldots$.

(a) Does there exist a random variable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ such that $f_n \to f$ almost surely?

(b) Does there exist a random variable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ such that $f_n \xrightarrow{\mathbb{P}} f$?

(c) Does there exist a random variable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ such that $f_n \xrightarrow{L_P} f$?

(2) Use Minkowski's inequality to show that for sequences $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ and $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ of real numbers it holds for all $1 \le p < \infty$ that

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(3) Let $n \in \mathbb{N}$. Define a σ–algebra on $[0,1]$ by

$$\mathcal{F} := \sigma \left\{ \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] , k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

(a) Why is the function $f(x) = x, \quad x \in [0,1]$ not $\mathcal{F}$–measurable?

(b) Give an example of a function which is $\mathcal{F}$–measurable?

(4) Let $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ be a sequence of independent identically distributed (i.i.d.) random variables such that $\mathbb{E}f_1 = m$ and $\sigma^2 = \mathbb{E}(f_1 - m)^2$. Show using the *Central limit theorem* that

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \omega : \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \le x \right\} \right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

for $n \to \infty$.

(5) Assume the probability space $((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$. Compute

$$\mathbb{E} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \mathbb{I}_{\left[\frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}\right]}.$$