Stefan Geiß

Todennäköisyysteoria
Harjoitus 9 (29. Maaliskuuta 2004)

(1) Olkoon

$$\gamma_{m,\sigma^2}(B) := \int_B e^{-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}},$$

missä $m \in \mathbb{R}$ ja $\sigma > 0$. Osoita, että

$$\int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 d\gamma_{m,\sigma^2}(x) = \sigma^2.$$

(2) Olkoot $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ja $g_1, g_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ riippumattomia satunnaismuuttujia siten, että

$$\mathbb{P}(g_i > \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\lambda^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Osoita, että on olemassa $m \in \mathbb{R}$ ja $\sigma \geq 0$ siten, että

$$\alpha g_1 \widehat{+} \beta g_2(t) = e^{itm} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

(3) Olkoot $g_1, g_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ riippumattomia satunnaismuuttujia siten, että

$$\mathbb{P}(g_i > \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\lambda^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

(a) Olkoon $A = (\alpha_{lk})_{l=1,k=1}^{d,n}$ matriisi ja määrittelemme funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ kaavalla

$$f(\omega) := \left(\sum_{k=1} \alpha_{lk} g_k(\omega) \right)_{l=1}^d.$$

Onko $law(f) \in \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}^d)$ Gaussinen mitta avaruudessa $\mathbb{R}^d$?

(b) Olkoon $\mu \in \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}^d)$ Gaussinen mitta. Osoita, että on olemassa $m \in \mathbb{R}^d$ ja matriisi $A = (\alpha_{k,l})_{k,l=1}^d$ siten, että $\mu = law(f)$ missä $f(\omega) := m + \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{kl} g_k(\omega)\right)_{l=1}^d$.

(c) Laske mitan $\mu = law(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^4)$ kovarianssi-matriisi R, missä $f(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega), f_3(\omega), f_4(\omega))$ ja

$$\begin{aligned}
f_1(\omega) &:= 1 + g_1(\omega) + g_2(\omega) + g_3(\omega) + g_4(\omega) \\
f_2(\omega) &:= 2 + g_1(\omega) - g_2(\omega) + g_3(\omega) - g_4(\omega) \\
f_3(\omega) &:= 3 + g_1(\omega) + g_2(\omega) - g_3(\omega) - g_4(\omega) \\
f_4(\omega) &:= 4 + g_1(\omega) - g_2(\omega) - g_3(\omega) + g_4(\omega).
\end{aligned}$$

Onko tämän takana jokin yleinen idea?

(4*) Onko olemassa satunnaismuuttujat $f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ siten, että $law(f_1)$ ja $law(f_2)$ ovat Gaussisia mittoja, mutta $law(F)$, $F(\omega) := (f_1(\omega), f_2(\omega)) \in \mathbb{R}^2$ ei ole Gaussinen mitta?