Stefan Geiß

Todennäköisyysteoria

Harjoitus 1 (17. helmikuuta 2003)

(1) Olkoon $\Omega \neq \emptyset$ joukko ja $\mathcal{G}$ joukkojen systeemi, joka sisältää osajoukkoja $B \subseteq \Omega$ (yleensä $\mathcal{G} \neq 2^\Omega$). Määrittelemme

$$\sigma(\mathcal{G}) := \bigcap \mathcal{F},$$

missä leikkaus otetaan yli kaikkien σ-algebrien $\mathcal{F}$, jotka sisältävät kaikki joukot $B \in \mathcal{G}$. Osoita, että

(a) $\sigma(\mathcal{G})$ on σ-algebra,

(b) jos $\mathcal{F}$ on σ-algebra siten, että $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, silloin $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$.

(2) Osoita, että

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left((a,b) : -\infty < a < b < \infty\right).$$

(3) Olkoot $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ ja $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ mitallisia avaruuksia ja $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ mitallinen kuvaus. Olkoon μ_1 mitta σ-algrebrassa $\mathcal{F}_1$ ja

$$\mu_2(B_2) := \mu_1(f^{-1}(B_2)) \quad \text{kaikille} \quad B_2 \in \mathcal{F}_2.$$

Osoita, että

(a) μ_2 on mitta,

(b) μ_2 on todennäköisyysmitta, jos μ_1 on todennäköisyysmitta.

(c) Keksi esimerkki siten, että μ_1 on σ-äärellinen, mutta μ_2 ei ole.

(4) Olkoon $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ mitallinen avaruus, Ω_2 joukko ja $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ kuvaus. Määritellään systeemi

$$\mathcal{B} := \left\{B \subseteq \Omega_2 : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1\right\} \subseteq 2^{\Omega_2}.$$

Osoita, että $\mathcal{B}$ on σ-algebra.

(5) Olkoot $\Omega_1 = [0,1]$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ja $f(x) := x^2$. Onko $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ mitallinen, jos

(a) $\mathcal{F}_1 := \sigma\left([a,b) : 0 \leq a < b \leq 1\right)$,

(b) $\mathcal{F}_1 := \sigma\left((a,b) : 0 \leq a < b \leq 1\right)$,

(c) $\mathcal{F}_1 := \sigma\left([0,1/2)\right)$?

(6) Olkoot $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$ ja $\mathcal{F}_2 := \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Onko $\mathcal{F}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pienin σ-algebra siten, että $f(x) = x^2$ on mitallinen?