Stefan Geiß

Todennäköisyysteoria

Harjoitus 3 (24. helmikuuta 2003)

(1) Olkoot $f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia siten, että $f_1(\omega) \geq 0$ ja $f_2(\omega) \geq 0$ kaikille $\omega \in \Omega$. Käyttämällä integraalin määritelmää (jos $f \geq 0$, niin $\int_\Omega f(\omega) d\mathbb{P}(\omega) := \sup \int_\Omega g(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$, missä g on mitallinen yksinkertainenfunktio siten, että $0 \leq g(\omega) \leq f(\omega)$) osoita, että $\int_\Omega (f_1(\omega) + f_2(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) < \infty$ jos

$$\int_\Omega f_1(\omega) d\mathbb{P}(\omega) < \infty \quad \text{ja} \quad \int_\Omega f_2(\omega) d\mathbb{P}(\omega) < \infty.$$

(2) Olkoot $M := \mathbb{R}^d$, $d(x,y) := \max_{i=1,...,d} |x_i - y_i|$ (pari (M,d) on metrinen avaruus) ja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus.

(a) Olkoon $f : \Omega \to M$ satunnaismuuttuja siten, että

$$f(\omega) = (f_1(\omega), ..., f_d(\omega)).$$

Osoita, että funktiot $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., d$, ovat satunnaismuuttujia.

Vihje: Harjoituksen 1 tehtävät.

(b) Olkoot $f_1, ..., f_d : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia. Määrittelemme $f : \Omega \to M$ kaavalla

$$f(\omega) := (f_1(\omega), ..., f_d(\omega)).$$

Osoita, että $f : \Omega \to M$ on satunnaismuuttuja.

(3) Käyttämällä Lausetta 2.3.5 osoita, että

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k \eta_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

jos $\alpha_k \geq 0$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$, $1 < p, q < \infty$, ja $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

(4) Olkoot $f_n, g_n, f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia.

(a) Osoita että $f_n g_n \to_{L_1} fg$ jos $f_n \to_{L_2} f$, $g_n \to_{L_2} g$, $f \in L_2$ ja $g \in L_2$.

Vihje: Käytä Hölder:in epäyhtälöä.

(b) Osoita että $f_n g \to_{\mathbb{P}} fg$ jos $f_n \to_{\mathbb{P}} f$.

(c) Osoita, että $f_n \to_{\mathbb{P}} f$ jos ja vain jos

$$\int_\Omega \min\{1, |f_n(\omega) - f(\omega)|\} \, d\mathbb{P}(\omega) \to_n 0.$$

Onko $D(f,g) := \int_\Omega \min\{1, |f(\omega) - g(\omega)|\} \, d\mathbb{P}(\omega)$ metriikka?