

Stokastiset mallit
Harjoitukset 24/02/2003
-3-

- (1) (a) Esitä luentojen esimerkkiä satunnaiskävelijä (the random walker) vastaavan Markovin ketjun siirtymämatriisi T .

(b) Laske T^2 .

(c) Laske

$$\mathbb{P}(f_n = i) = \quad , \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

käyttämällä Chapman-Kolmogorov-yhtälöitä.

- (d) Laske todennäköisyys, että kävelijä kävelee yhden kierroksen myötöpäivään:

$$\mathbb{P}(f_{k+4} = 1, f_{k+3} = 4, f_{k+2} = 3, f_{k+1} = 2 | f_k = 1)$$

käyttämällä step-by-step kaavaa.

- (e) Muutetaan satunnaiskävelijä esimerkkiä seuraavalla tavalla: oletetaan, että satunnaiskävelijä käyttää kahta tavallista kolikkoa. Joka kerran hänen heittäessään ensimmäistä kolikkoa hän päättää joko pysyä paikallaan tai siirtyä seuraavaan kulmaan. Jos ensimmäinen kolikko on kruuna hän pysyy paikallaan. Jos ensimmäisellä heitolla tulee klaava heittää hän toista kolikkoa päättääkseen siirtyäkö myötä- vai vastapäivään (kuten esimerkissä). Millainen on tämän Markovin ketjun siirtymämatriisi ja siirtymäkuvio?

- (2) Olkoon $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ Markovin ketju.

(a) Osoita, että

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(f_{i+2} = x_{i+2}, f_{i+1} = x_{i+1} | f_i = x_i) = \\ \mathbb{P}(f_{i+2} = x_{i+2} | f_{i+1} = x_{i+1}) \mathbb{P}(f_{i+1} = x_{i+1} | f_i = x_i). \end{aligned}$$

(b) Osoita, että

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(f_{i+1} = x_{i+1}, f_{i-1} = x_{i-1} | f_i = x_i) = \\ \mathbb{P}(f_{i+1} = x_{i+1} | f_i = x_i) \mathbb{P}(f_{i-1} = x_{i-1} | f_i = x_i). \end{aligned}$$

Vihje kohtiin (a) ja (b): Käytä ensin ehdollisen todennäköisyyden määritelmää $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Tämän jälkeen voit muuttaa yhtälöt Markovin ketjujen teoriasta tutuiksi yhtälöiksi.

- (3) Olkoot f_0, f_1, f_2 riippumattomia satunnaismuuttujia joiden arvojoukko on $X = \{1, 2, \dots, M\}$. Nyt funktiot (f_0, f_1, f_2) voidaan tulkita Markovin ketjuksi, jonka tila-avaruus on X . Oletetaan, että (marginaali) jakaumat ovat

$$p_0(l) = \mathbb{P}(f_0 = l),$$

$$p^{(1)}(l) = \mathbb{P}(f_1 = l),$$

$$p^{(2)}(l) = \mathbb{P}(f_2 = l),$$

kun $l=1, \dots, M$.

Laske siirtymämatriisit T_1 ja T_2 .

Jos *homogeeninen* Markovin ketju koostuu riippumattomista satunnaismuuttujista, niin mitä voit sanoa näiden satunnaismuuttujien jakaumista?