Stokastiset mallit
Harjoitukset 18.3.2002
-8-

(1) Kolikon heittoa (n kertaa) voidaan tarkastella n:n riippumattoman samoinjakautuneen satunnaismuuttujan $X_1, \ldots, X_n$ tuottamana datana. Tällaisessa tapauksessa sat.muuttujan X_i jakauma on

$$\mathbb{P}(X_i = x) = \Theta^x (1-\Theta)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

Oletetaan, että $h(x|\Theta) = \Theta^x (1-\Theta)^{1-x}$ ja Θ on tasajakautunut välillä $[0, 1]$:

$$\mathbb{P}(\Theta \in [a, b]) = b - a, \quad 0 \leq a < b \leq 1.$$

Tällöin posteriori osotusarvo Θ:lle ehdolla data $x_1, \ldots, x_n$ on

$$\int_0^1 \Theta \pi(d\Theta | x_1, \ldots, x_n) = \frac{\int_0^1 \Theta \prod_{i=1}^n h(x_i|\Theta) d\Theta}{\int_0^1 rod_{i=1}^n h(x_i|\Theta) d\Theta}.$$

Laske posteriori odotusarvo Θ:lle, jos kolikon heitosta saatiin

(a) data $0, 1, 1, 0$.

(b) data $1, \ldots, 1$ (n-kertaa).

(2) Homogeenisen Markovin ketjun siirtymämatriisia $T = (p(k, l))_{k,l=0}^K$ kutsutaan *kaksoisstokastiseksi*, jos

$$\sum_{i=0}^K p(k, i) = \sum_{i=0}^K p(i, l) = 1 \quad \text{kaikille} \quad k, l = 0, ..., K.$$

Osoita, että homogeeniselle Markovin ketjulle, jonka tila-avaruus $X = \{0, ..., K\}$, seuraavat ovat ekvivalentteja.

(a) Markovin ketjulla on tasainen tasapainojakauma, mikä tarkoittaa, että $\frac{1}{K+1} = s_0 = \cdots = s_K$ on tasapainojakauma.

(b) Siirtymämatriisi on kaksoisstokastinen.

(3) Satunnaismuuttujan f *keskihajonta* määritellään kaavalla

$$\sigma := \sqrt{\mathbb{E}\,(f - \mathbb{E}f)^2}, \quad (\text{ jos } \mathbb{E}f^2 < \infty).$$

(a) Olkoon X välillä (a, b) tasajakautunut satunnaismuuttuja. Tällöin satunnaismuuttujan X jakauma saadaan kaavasta

$$\mathbb{P}(X \in A) := \frac{1}{b-a} \int_a^b \mathbb{I}_A(x)\, dx, \quad A \in \mathcal{B}((a, b)).$$

Laske odotusarvo ja keskihajonta σ_X.

(b) Oletetaan, että satunnaismuuttujat f ja g ovat riippumattomia ja niiden keskihajonnat ovat σ_f ja σ_g. Laske satunnaismuuttujan $f+g$ keskihajonta σ_{f+g}.

(c) Olkoot $X \sim Tas(a,b)$ tasajakautunut satunnaismuuttuja, kuten kohdassa (a), ja satunnaismuuttuja $Z \sim N(m,\sigma^2)$, missä $m \in \mathbb{R}$ ja $\sigma^2 > 0$. Satunnaismuuttujan Z jakauma saadaan kaavasta

$$\mathbb{P}(Z \in A) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_A e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Laske satunnaismuuttujan $X+Z$ odotusarvo ja keskihajonta σ_{X+Z}.