Christel Geiss (geiss@maths.jyu.fi)

Stokastiset mallit

Harjoitukset 11/03/2002

-7-

(1) Tässä tehtävässä työskennellään todennäköisyysavaruudessa $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), l)$.

(a) Suppeneeko funktiojono

$$f_n(x) := \begin{cases} e^n & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

L_p:ssä, $(0 < p < \infty)$ kohti funktiota $f \equiv 0$.

(b) Määritellään funktiot $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ kaavalla

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{n^x} & \text{if } x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} , \\ n^x & \text{if } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} . \end{cases}$$

Suppeneeko jono $f_n(x)$ kohti funktiota $f(x) \equiv 1$, kun $n \to \infty$

i. melkein varmasti,

ii. todennäköisyysmitan suhteen,

iii. L_p:ssä, $(0 < p < \infty)$?

(2) Olkoon $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ homogeeninen Markovin ketju, jonka tila-avaruus $X = \{0, 1, 2\}$ ja siitymämatriisi $(0 < \varepsilon < 1)$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mitkä X:n osajoukot ovat sekä suljetuja, että pelkistymättömiä?

(b) Laske ketjun $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ tasapainojakaumat.

(c) Olkoon (q_0, q_1, q_2) alkujakauma. Laske rajajakauma

$$\lim_{n \to \infty} (q_0, q_1, q_2) \circ T^n.$$

(3) Olkoon $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ homogeeninen Markovin ketju, jonka tila-avaruus on X. Oletetaan, että $S = (s_0, s_1, \ldots)$ on tasapainojakauma. Todista seuraava väite:
Jos aloitetaan tasapainojakaumasta, niin kaikki äärellisdimensioiset jakaumat ovat aikainvariantteja, eli jokaiselle $n \geq 1$ ja kaikille $k_1, \ldots, k_n \in X$ ja $m = 0, 1, \ldots$ on voimassa

$$\mathbb{P}_S(f_n = k_n, \ldots, f_0 = k_0) = \mathbb{P}_S(f_{n+m} = k_n, \ldots, f_m = k_0),$$

missä $\mathbb{P}_S(A) := \sum_{l \in X} \mathbb{P}(A | f_0 = l) s_l$.

(4) Olkoon X homogeenisen Markovin ketjun tila-avaruus ja tilat $k, l \in X$ kommunikoivia. Todista väite: Jos k on palautuva, niin myös l on palautuva.