

Stokastiset mallit
Harjoitukset 18.02.2002

-4-

- (1) Tarkastellaan tammikuun **ensimmäisiä** päiviä Snoqualmie Fallsissa vuosina 1948 – 1983. Laske suurimman uskottavuuden estimatti kuivien ja sateisten päivien jakaumalle. (tarvittavat tiedot, kuinka monena vuonna tammikuun 1. päivä oli sateinen vai kuiva, saat sademääriä kuvaavasta taulukosta).
- (2) Olkoon $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ homogeeninen Markovin ketju, jonka tila-avaruus on $X = \{0, 1\}$ ja siirtymämatriisi on

$$T = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}.$$

- (a) Oletetaan, että Markovin ketju on tilassa 0. Osoita, että todennäköisyys pysyä tässä tilassa tarkalleen k askelta (mukaanlukien nykyinen askel) on

$$p_{00}^{k-1}(1 - p_{00}).$$

- (b) Osoita, että odotettu askelten lukumäärä pysyä tässä tilassa on

$$\frac{1}{1 - p_{00}}.$$

Vihje: Odotusarvo askelten lukumäärälle pysyä tilassa 0 on

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(\text{ketju pysyy } k \text{ askelta tilassa } 0).$$

- (c) Mitkä ovat kuivien tai sateisten päivien muodostamien jaksojen odotettavissa olevat pituudet tammikuussa Snoqualmie Fallsissa?
- (3) Oletetaan, että päivänä 0 yksi henkilö kuule salaisuuden. Sitten tapahtuu seuraavaa: Koska henkilö ei tiedä kuinka tärkeä salaisuus on, niin hän unohtaa sen seuraavaan päivään mennessä todennäköisyydellä $p_0 \in (0, 1)$. Siinä tapauksessa, että henkilö ei unohda salaisuutta, niin hän kertoo sen tarkalleen yhdelle uudelle henkilölle seuraavana päivänä todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$.
Jokaisena seuraavana päivänä henkilöt ovat unohtaneet salaisuuden todennäköisyydellä $p_0 \in (0, 1)$ tai kertovat sen tarkalleen yhdelle uudelle henkilölle (ehdolla, että he muistavat salaisuuden) todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$.

- (a) Olkoon f_i niiden henkilöiden lukumäärä, jotka tietävä salaisuuden päivänä $i = 0, 1, 2, \dots$. Esitä $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ haarautumisprosessina, jonka tila-avaruus on $X = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- (b) Millä p_0 :n arvoilla salaisuus lopulta unohtuu todennäköisyydellä $q = 1$ ja $q < 1$ (laske q).