Stokastiset mallit

Harjoitukset 11.2.2002

-3-

(1) Olkoon

$$p(k,l)_{k,l=0,1,2} := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

siirtymämatriisi.

(a) Laske $\mathbb{P}(f_{k+3} = 1, f_{k+2} = 0, f_{k+1} = 1 | f_k = 2)$ käyttämällä step-by-step kaavaa.

(b) Laske $\mathbb{P}(f_{k+4} = 1 | f_k = 1)$ käyttämällä, esimerkiksi, Chapman-Kolmogorov-yhtälöitä.

(2) Olkoon $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ Markovin ketju.

(a) Osoita, että

$$\mathbb{P}(f_{i+2} = x_{i+2}, f_{i+1} = x_{i+1} | f_i = x_i) = \mathbb{P}(f_{i+2} = x_{i+2} | f_{i+1} = x_{i+1}) \mathbb{P}(f_{i+1} = x_{i+1} | f_i = x_i).$$

(b) Osoita, että

$$\mathbb{P}(f_{i+1} = x_{i+1}, f_{i-1} = x_{i-1} | f_i = x_i) = \mathbb{P}(f_{i+1} = x_{i+1} | f_i = x_i) \mathbb{P}(f_{i-1} = x_{i-1} | f_i = x_i).$$

Vihje kohtiin (a) ja (b): Käytä ensin ehdollisen todennäköisyyden määritelmää $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Tämän jälkeen voit muuttaa yhtälöt Markovin ketjujen teoriasta tutuiksi yhtälöiksi.

(3) Olkoot f_0, f_1, f_2 riippumattomia satunnaismuuttujia joiden arvojoukko on $X = \{1, 2, \ldots, M\}$. Nyt funktiot (f_0, f_1, f_2) voidaan tulkita Markovin ketjuksi, jonka tila-avaruus on X. Oletetaan, että (marginaali) jakaumat ovat

$$p_0(l) = \mathbb{P}(f_0 = l),$$
$$p^{(1)}(l) = \mathbb{P}(f_1 = l),$$
$$p^{(2)}(l) = \mathbb{P}(f_2 = l),$$

kun l=1,...,M.
Laske siirtymämatriisit T_1 ja T_2.
Jos *homogeeninen* Markovin ketju koostuu riippumattomista satunaismuuttujista, niin mitä voit sanoa näiden satunnaismuuttujien jakaumista?