Christel Geiss (geiss@maths.jyu.fi)

Stokastiset mallit

Harjoitukset 04.02.2002

-2-

(1) Olkoot $f_1, \ldots, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ riippumattomia satunnaismuuttujia äärellisellä todennäköisyyskentällä $[\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P}]$. Määritellään

$$f_{min} = min\,\{f_1, \ldots, f_n\}$$

ja

$$f_{max} = max\,\{f_1, \ldots, f_n\}\,.$$

Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Näytä, että

$$\mathbb{P}(f_{min} \geq x) = \Pi_{i=1}^n \mathbb{P}(f_i \geq x),$$

ja

$$\mathbb{P}(f_{max} < x) = \Pi_{i=1}^n \mathbb{P}(f_i < x).$$

(2) Oletetaan, että 'diskreetti' Brownin liike $(S_i)_{i=0}^n$, missä

$$S_i = e^{\sigma(\Delta_1 + \cdots + \Delta_i) - bi}$$

ja $[\mathbb{D}_{\mathrm{n}}, \mathcal{F}_k^{\mathrm{dyad}}, \mu_n^{(p)}]$ ovat määritellyt, kuten luentojen luvussa 1.1.

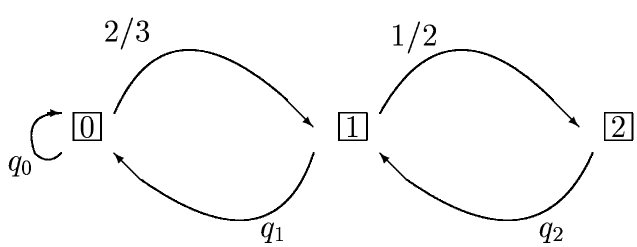
(a) Olkoot $0 < e^{-\sigma-b} < 1 < e^{\sigma-b}$. Osoita, että on olemassa $0 < p_0 < 1$ siten, että

$$\mathbb{E}_{\mu_n^{(p_0)}} \frac{S_i}{S_{i-1}} = \sum_{\omega \in \mathbb{D}_{\mathrm{n}}} \frac{S_i(\omega)}{S_{i-1}(\omega)} \mu_n^{(p_0)}(\{\omega\}) = 1.$$

(b) Tehtävää (1) hyväksi käyttäen laske jakauma

$$\mu_n^{(p)}\left(max\left\{ \frac{S_1}{S_0}, \frac{S_2}{S_1}, \ldots \frac{S_n}{S_{n-1}} \right\} < x \right),\ x \in \mathbb{R}.$$

(3) (a) Oletetaan, että homogeenisen Markovin ketjun tila-avaruus on $X = \{0, 1, 2\}$ ja siirtymätodennäköisyydet kuten allaolevassa kuvassa.



Kuvaa hyväksi käyttäen (nuoli tilasta 0 tilaan 1 ja sen päällä oleva luku 2/3 tarkoittaa, että $p(k,l)_{k,l=0,1,2} = 2/3$) täydennä matriisi $p(k,l)_{k,l=0,1,2}$ Markovin ketjun siirtymämatriisiksi. Anna oikeat arvot todennäköisyyksille q_0, q_1, q_2.

$$p(k,l)_{k,l=0,1,2} := \begin{pmatrix} q_0 & \frac{2}{3} & 0 \\ q_1 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix}$$

(b) Olkoot

$$T := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Markovin ketjun siirtymämatriisi. Tila-avaruus $X = \{0,1,2,3\}$. Piirrä matriisia vastaava kuva kuten kohdassa a) (Huomaa: Jos $p(k,l) = 0$, niin nuolta tilasta k tilaan l ei piirretä.) ja laske

$$\mathbb{P}(f_{k+1} = 2 \text{ or } \ f_{k+1} = 3 | f_k = 0)$$

jos $\mathbb{P}(f_k = 0) > 0$.