Sovellettu predikaattilogiikka tehtäviä

Antti Valmari

Jyväskylän yliopisto
Informaatioteknologian tiedekunta

12. joulukuuta 2023

Sisällysluettelo

1	Johdanto	2
2	Muutamia symboleita ja käsitteitä	2
3	Esimerkki: ihmisten sukulaissuhteet	3
4	Lausekkeet ja sijoittaminen	4
5	Kaavat	5
6	Kaksi eri implikaatiota (ja muutakin)	6
7	Reaaliluvut ja niiden yhtälöt	9
8	Lisää päättelemistä propositiologiikan keinoin	10
9	Reaalilukujen suuruusjärjestys	10
10	Predikaattilogiikkaa luonnollisille luvuille	12
11	Kvanttorit ja niiden lait	14
12	Modernin logiikan suuria tuloksia	15
13	Lopuksi	15

Linkit lakeihin ja päättelysääntöihin

[1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [21] [22] [23] [24] [25] [26] [27] [28] [29] [30] [31] [32] [33] [34] [35] [36] [37] [38] [39] [40] [41] [42] [43] [44] [45] [46] [47] [48] [49] [50] [51] [52] [53] [54] [55] [56] [57] [58] [59] [60] [61] [62] [63] [64] [65] [66] [67] [68] [69] [70] [71] [72] [73] [74] [75] [76] [77] [78] [79] [80] [81] [82] [83] [84] [85] [86] [87] [88] [89] [90] [91] [92] [93] [94] [95] [96] [97] [98] [99] [100] [101] [102] [103] [104]

1 Johdanto

1. Tämän tehtävän tavoitteena on havahduttaa huomaamaan luonnollisen kielen monitulkintaisuutta. Tarkastellaan lauseita ”saimme hyvää ruokaa” ja ”aluksi söin salaatin”. Kummassa niistä kahdessa viimeisessä sanassa kaksi viimeistä kirjainta ovat samat?

2 Muutamia symboleita ja käsitteitä

Vasen $\Leftrightarrow$ *oikea* tarkoittaa, että jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa *vasen* on tosi, myös *oikea* on tosi, ja päinvastoin. [1]

jos on päätelty	niin saa päätellä
$vasen \Leftrightarrow oikea$	$oikea \Leftrightarrow vasen$
$kaava_1 \Leftrightarrow kaava_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow kaava_n$	$kaava_1 \Leftrightarrow kaava_n$
	$kaava \Leftrightarrow kaava$

[2]

kaava $\Leftrightarrow \mathsf{T}$ jos ja vain jos jokaisessa mahdollisessa tilanteessa *kaava* tuottaa T. [3]

2. Perustele [3] ilmauksen ”tuottaa T” merkityksen ja [1]:n avulla!

3. Anna vastaesimerkki väitteelle $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ reaaliluvuilla!

4. Anna vastaesimerkki yhtäpitävyydelle $P \wedge Q \Leftrightarrow P \vee Q$!

$$\neg\neg\varphi \;\Leftrightarrow\; \varphi \qquad [4]$$

$$\varphi \wedge \psi \;\Leftrightarrow\; \psi \wedge \varphi \qquad [5]$$

$$\varphi \vee \psi \;\Leftrightarrow\; \psi \vee \varphi \qquad [6]$$

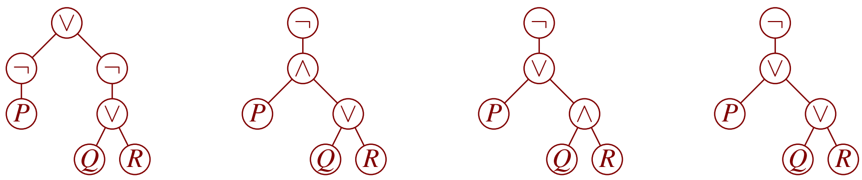
5. Laki $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$ antaa luvan päätellä muun muassa $\neg(P \wedge \mathsf{T}) \vee Q \Leftrightarrow \neg(\mathsf{T} \wedge P) \vee Q$. Mikä on siinä φ:n tilalla ja mikä ψ:n tilalla?

6. Keksi viivan paikalle mahdollisimman yksinkertainen sellainen kaava, että $\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow$ __!

7. Mihin muotoon $(P \wedge Q) \vee R$ ja $P \wedge (Q \vee R)$ sievenevät, kun P:n tilalle sijoitetaan F?

$$\neg(\varphi \vee \psi) \;\Leftrightarrow\; \neg\varphi \wedge \neg\psi \qquad \neg(\varphi \wedge \psi) \;\Leftrightarrow\; \neg\varphi \vee \neg\psi \qquad [7]$$

8. Poista vapaaehtoiset sulkeet seuraavista yhtäpitävyyksistä:



Kuva 1: Lausekepuuesimerkkejä

$$
\begin{array}{rcl}
P \vee (Q \wedge R) & \Leftrightarrow & (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \\
P \wedge (Q \vee R) & \Leftrightarrow & (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)
\end{array}
$$

9. Kirjoita jokaisesta kuvan 1 lausekepuusta kaava, jossa ei ole turhia sulkeita!
10. Esitä $\neg(P \wedge \mathsf{T}) \vee Q$ lausekepuuna!

$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \ \Leftrightarrow\ \varphi \qquad \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \ \Leftrightarrow\ \varphi$ [8]

¬	
F	T
U	U
T	F

∧	F	U	T
F	F	F	F
U	F	U	U
T	F	U	T

∨	F	U	T
F	F	U	T
U	U	U	T
T	T	T	T

[9]

Propositiomuuttuja voi mahdollisessa tilanteessa saada arvokseen vain F tai T. [10]

Ilman muita oletuksia kuin T johdettu kaava, yhtäpitävyys, päättelyimplikaatio tai yhtätotuus on laki. [11]

Jos laissa ei esiinny symboleita $\forall$ eikä $\exists$, niin lain muuttujien tilalle saa sijoittaa mitkä tahansa määritellyt lausekkeet. [12]

3 Esimerkki: ihmisten sukulaissuhteet

11. Ilmaise $\Leftrightarrow$:n avulla, että Dianan lapset ovat William ja Harry, ja vain he!
12. Määrittele $\mathit{serkku}(x,y)$, eli kirjoita "$\mathit{serkku}(x,y) \Leftrightarrow$" ja sellainen x:n ja y:n kaava, että se on tosi täsmälleen silloin kun x on y:n serkku! (Tälle tehtävälle tulee tässä kohdassa kömpelö vastaus. Luvussa 11 esitellään keino, jolla saa näppärämmän vastauksen, ja tehdään tämä tehtävä uudelleen.)

Vertailu (yleisemmin relaatio) tuottaa U jos ja vain jos ainakin yksi sen osapuoli on määrittelemätön. [13]

13. Sievennä $\mathit{sisarus}(\mathit{puoliso}(\mathit{vanhA}(\mathsf{Lilibet})), \mathsf{William})$ käyttäen tähän mennessä annettuja tietoja!

14. Osoita, että laista $\mathit{vanhA}(x) \neq \mathit{vanhB}(x) \;\Leftrightarrow\; \mathsf{T}$ seuraa, että sekä $\mathit{vanhA}(x)$ että $\mathit{vanhB}(x)$ on aina määritelty!

15. Olettaen, että $\mathit{parisuhteessa}(x)$ on tosi jos x:llä on puoliso ja epätosi muutoin, perustele, että $\neg\mathit{parisuhteessa}(x) \vee x \neq \mathit{puoliso}(x) \;\Leftrightarrow\; \mathsf{T}$ ilmaisee, että kukaan ei ole oma puolisonsa!

4 Lausekkeet ja sijoittaminen

Lauseke on määrittelemätön jos ja vain jos se sisältää määrittelemättömän laskutoimituksen. [14]

16. Kokeile jollain itsellesi tutulla ohjelmointikielellä, mitä vertailut `x<x`, `x<=x`, `x==x`, `x!=x`, `x>=x`, `x>x`, `x<y`, `x<=y`, `x==y`, `x!=y`, `x>=y` ja `x>y` tuottavat, kun `x` ja `y` ovat liukulukuja (esim. `float` tai `double`), `x`:n arvo on $\frac{0.}{0.}$ ja `y`:n arvo on $\sqrt{-1.}$!

17. Logaritmi on määritelty (vain) positiivisille reaaliluvuille. Laske $\left\lceil \sqrt{1 - \frac{\log(2x+1)}{-x}} \right\rfloor$! Jätä kaikki $\mathsf{T}\wedge$ ja $\wedge\mathsf{T}$ pois. Syntyviä epäyhtälöitä ei tarvitse sieventää eikä ratkaista.

Jos $\mathfrak{f}$ ja $\mathfrak{g}$ ovat mitkä tahansa lausekkeet, niin $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{g} = \mathfrak{f}$. [15]

Jos $\lceil \mathfrak{h}(\mathfrak{f}) \rfloor \vee \lceil \mathfrak{h}(\mathfrak{g}) \rfloor$ ja $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$, niin $\mathfrak{h}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{h}(\mathfrak{g})$. [16]

18. Mitkä ovat päättelysäännön [16] $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}(\mathfrak{f})$ ja $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$, kun tiedosta
$\mathit{vanhA}(\mathsf{Lilibet}) = \mathsf{Meghan}$ johdetaan
$\mathit{vanhB}(\mathit{puoliso}(\mathit{vanhA}(\mathsf{Lilibet}))) = \mathit{vanhB}(\mathit{puoliso}(\mathsf{Meghan}))$?

19. Mitkä ovat päättelysäännön [16] $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}(\mathfrak{f})$ ja $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$, kun tiedosta $ab + ba = 2ab$ johdetaan $a^2 + (ab + ba) + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$?

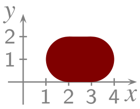
Jos $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_n$ ovat määritellyt, niin laista $\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_n) = \mathfrak{g}(a_1, \ldots, a_n)$ saa johtaa kaavan $\mathfrak{f}(\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_n) = \mathfrak{g}(\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_n)$. [17]

20. Valitaan φ:ksi $\sqrt{x^2} = -x \vee x > 0$ ja $\mathfrak{f}$:ksi $2x + a$. Sijoita x:n tilalle $\mathfrak{f}$ kaavassa φ!

21. Jollei vaadittaisi että $\mathfrak{h}_i$:t ovat määritellyt, niin miten päättelysäännöllä [17] voitaisiin johtaa $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$?

5 Kaavat

Jokaisella reaaliluvulla a pätee $a < 0 \wedge |a| = -a \vee a \geq 0 \wedge |a| = a$. [18]



22. Kirjoita kaava, joka on tosi täsmälleen silloin kun (x,y) on edellä näytetyn, kaavan $(x-2)^2+(y-1)^2 \leq 1 \vee (x-3)^2+(y-1)^2 \leq 1 \vee 2 < x < 3 \wedge 0 \leq y \leq 2$ määräämän kuvion reunapiste!

Jos $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$ tai sekä $\mathfrak{f}$ että $\mathfrak{g}$ on määrittelemätön, ja jos φ ei sisällä symboleita $\forall$ ja $\exists$, niin $\varphi(\mathfrak{f}) \Leftrightarrow \varphi(\mathfrak{g})$. [19]

23. Mitä ovat $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ ja φ, kun päättelysäännöllä [19] johdetaan $a-a < b-a \Leftrightarrow 0 < b-a$ yhtäsuurudesta $a-a=0$?

Jos $\mathfrak{f}$ on määritelty, niin $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$. [20]

Jos φ ei sisällä symboleita $\forall$ ja $\exists$, niin $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \wedge \varphi(\mathfrak{f}) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{f} = \mathfrak{g} \wedge \varphi(\mathfrak{g})$. [21]

Jos $\psi \Leftrightarrow \chi$ ja jos X ei ole $\varphi(X)$:ssä muiden symbolien alaisuudessa kuin $\wedge$, $\vee$ ja parillinen määrä symbolia $\neg$, niin $\varphi(\psi) \Leftrightarrow \varphi(\chi)$. [22]

24. Johda $2x-y=3 \wedge 3x-2y=2 \;\Leftrightarrow\; y=2x-3 \wedge 3x-2y=2$ siitä, että $2x-y=3 \;\Leftrightarrow\; y=2x-3$. Kerro, mitä tähän mennessä esitettyä logiikan lakia, päättelysääntöä tms. käytit, ja mitä sen φ ja niin edelleen ovat!

25. Kirjoita kaava, jossa ei ole muita atomikaavoja kuin φ, $\lceil\varphi\rfloor$, ψ ja $\lceil\psi\rfloor$, ja joka tuottaa aina saman totuusarvon kuin $\lceil\varphi \vee \psi\rfloor$!

Vasen $\equiv$ *oikea* tarkoittaa, että jokaisessa mahdollisessa tilanteessa *vasen* ja *oikea* saavat saman totuusarvon. [23]

jos on päätelty	ja	niin saa päätellä	ja	ja
$\varphi \equiv \psi$		$\psi \equiv \varphi$		
$\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \ldots \equiv \varphi_n$		$\varphi_1 \equiv \varphi_n$		
		$\varphi \equiv \varphi$		
$\varphi \equiv \psi$		$\varphi \Leftrightarrow \psi$	$\neg\varphi \Leftrightarrow \neg\psi$	$\lceil\varphi\rfloor \Leftrightarrow \lceil\psi\rfloor$
$\varphi \Leftrightarrow \psi$	$\neg\varphi \Leftrightarrow \neg\psi$	$\varphi \equiv \psi$		
$\varphi \Leftrightarrow \psi$	$\lceil\varphi\rfloor \Leftrightarrow \lceil\psi\rfloor$	$\varphi \equiv \psi$		

[24]

$\varphi \equiv \mathsf{T}$ jos ja vain jos jokaisessa mahdollisessa tilanteessa φ tuottaa T.

Jos $\mathfrak{f}$ ja $\mathfrak{g}$ ovat mitkä tahansa lausekkeet, niin $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \;\equiv\; \mathfrak{g} = \mathfrak{f}$. [25]

Jos $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$ tai sekä $\mathfrak{f}$ että $\mathfrak{g}$ on määrittelemätön, ja jos φ ei sisällä symboleita $\forall$ ja $\exists$, niin $\varphi(\mathfrak{f}) \equiv \varphi(\mathfrak{g})$.

Jos $\psi \equiv \chi$ ja φ ei sisällä symboleita $\forall$ ja $\exists$, niin $\varphi(\psi) \equiv \varphi(\chi)$. [26]

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcl}
\varphi \wedge \mathsf{F} & \equiv & \mathsf{F} & \neg\neg\varphi & \equiv & \varphi & \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) & \equiv & \varphi \\
\varphi \vee \mathsf{T} & \equiv & \mathsf{T} & & & & \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) & \equiv & \varphi \\
\varphi \wedge \mathsf{T} & \equiv & \varphi & \varphi \wedge \psi & \equiv & \psi \wedge \varphi & \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) & \equiv & (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \\
\varphi \vee \mathsf{F} & \equiv & \varphi & \varphi \vee \psi & \equiv & \psi \vee \varphi & \varphi \vee (\psi \vee \chi) & \equiv & (\varphi \vee \psi) \vee \chi \\
\varphi \wedge \varphi & \equiv & \varphi & \neg(\varphi \wedge \psi) & \equiv & \neg\varphi \vee \neg\psi & \varphi \wedge (\psi \vee \chi) & \equiv & (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \\
\varphi \vee \varphi & \equiv & \varphi & \neg(\varphi \vee \psi) & \equiv & \neg\varphi \wedge \neg\psi & \varphi \vee (\psi \wedge \chi) & \equiv & (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)
\end{array}
\qquad [27]
$$

26. Perustele, että $\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$ toimii kuten monien ohjelmointikielten `||`.
27. Paina kaikki negaatiot alas kaavassa $\neg(P \wedge \neg(Q \wedge \neg R \wedge (\neg Q \vee P)) \vee \neg Q \wedge R)$ ja poista jokainen $\neg\neg$.
28. Johda laki $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ käyttäen vain De Morganin lakeja, kaksoiskiellon poistoa, sääntöjä [24] ja [26] sekä lakia $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$.
29. Johda $\lceil \varphi \vee \psi \rfloor \equiv \ldots$ siitä, että $\lceil \varphi \wedge \psi \rfloor \equiv \lceil \varphi \rfloor \wedge \lceil \psi \rfloor \vee \lceil \varphi \rfloor \wedge \neg\varphi \vee \lceil \psi \rfloor \wedge \neg\psi$!

6 Kaksi eri implikaatiota (ja muutakin)

Vasen $\Rightarrow$ *oikea* tarkoittaa, että jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa *vasen* on tosi, myös *oikea* on tosi. [28]

Vasen $\Leftarrow$ *oikea* tarkoittaa samaa kuin *oikea* $\Rightarrow$ *vasen*. [29]

jos on päätelty	ja	niin saa päätellä	ja	ja
$\varphi \Leftrightarrow \psi$		$\varphi \Rightarrow \psi$	$\psi \Rightarrow \varphi$	
$\varphi \Rightarrow \psi$	$\psi \Rightarrow \varphi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$		
$\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \varphi_n$		$\varphi_1 \Rightarrow \varphi_n$		
		$\mathsf{F} \Rightarrow \varphi$	$\varphi \Rightarrow \mathsf{T}$	$\varphi \Rightarrow \varphi$

[30]

30. Perustele, että jos φ on mikä tahansa kaava, niin $\varphi \Rightarrow \varphi$!
31. Anna sellainen kaava χ, että se ei sisällä symbolia φ ja jokaisella kaavalla φ pätee, että $\chi \Rightarrow \varphi$ jos ja vain jos $\chi \Leftrightarrow \varphi$!
32. Tarkoittakoon *möläytin* aliohjelmaa, jolla ei ole yhtään parametria, jonka tulostyyppi on merkkijono, ja joka pysähtyy. Esimerkiksi

```
string änkytin(){
  string tulos = "änky20kertaa=";
  for( int i = 0; i < 20; ++i ){ tulos += "änky"; }
  return tulos;
};
```

on möläytin. Tämän tehtävän tavoitteena on osoittaa eri tavalla kuin luentoruuduissa, että ei ole olemassa aliohjelmaa `bool pysähtyy( string S )`, joka palauttaa `true` tai `false` sen mukaan onko `S`:n sisältö möläytin. Jos sellainen aliohjelma olisi olemassa, niin jokaiselle luonnolliselle luvulle n voitaisiin kirjoittaa seuraavanlainen möläytin. Sen `for`-silmukka muodostaa ja tutkii yksi kerrallaan kaikki merkkijonot, joiden pituus on alle 10^n. Aliohjelma "`string aja( string S )`" tulkitsee `S`:n sisällön möläyttimeksi, suorittaa sen, ja palauttaa sen tuloksen.

```
string möö(){
  int raja = 100···0; // n kappaletta nollia
  string tulos = "Möläyttimien tuotoksia peräkkäin: ";
  for( string S = ""; S.size() < raja; ++S ){
    if( pysähtyy( S ) ){ tulos += aja( S ); }
  }
  return tulos;
};
```

(a) Perustele, että mikään möläytin, jonka pituus on alle 10^n, ei palauta samaa merkkijonoa kuin `möö`.

(b) Olkoon k `möö`:n muiden merkkien kuin `raja`:n arvoa ilmoittavien nollien määrä. Kaikkiaan `möö` on $k+n$ merkkiä pitkä, missä k ei riipu n:stä. Johda ristiriita.

Kaksiarvologiikassa $\varphi \Rightarrow \psi$ jos ja vain jos $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$. [31]

Jos $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_n$ ovat määritellyt, φ ei sisällä symboleita $\forall$ ja $\exists$ ja $\varphi(\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_n)$ on tosi, niin laista $\varphi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_n) = \mathfrak{g}(a_1, \ldots, a_n)$ saa johtaa $\mathfrak{f}(\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_n) = \mathfrak{g}(\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_n)$. [32]

$\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ [33]

$\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$ [34]

Jos $\varphi \Rightarrow \psi$ ja $\varphi \Rightarrow \chi$, niin $\varphi \Rightarrow \psi \wedge \chi$. [35]

$\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ [36]

$\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ [37]

Jos $\varphi \Rightarrow \chi$ ja $\psi \Rightarrow \chi$, niin $\varphi \vee \psi \Rightarrow \chi$. [38]

33. Johda $\wedge$:n ja $\vee$:n $\Leftrightarrow$-vaihdannaisuuslait $\wedge$:n ja $\vee$:n lisäyksen ja poiston avulla!

φ on tosi jokaisessa mahdollisessa tilanteessa oletuksilla Γ ja γ,
jos ja vain jos $\gamma \Rightarrow \varphi$ on pätevä oletuksilla Γ.

$\varphi \Rightarrow \psi$ on pätevä oletuksilla Γ ja γ, jos ja vain jos
$\gamma \wedge \varphi \Rightarrow \psi$ on pätevä oletuksilla Γ.

$\varphi \Leftrightarrow \psi$ on pätevä oletuksilla Γ ja γ, jos ja vain jos
$\gamma \wedge \varphi \Leftrightarrow \gamma \wedge \psi$ on pätevä oletuksilla Γ. [39]

$\varphi \equiv \psi$ on pätevä oletuksilla Γ ja γ, jos ja vain jos
$\lceil \gamma \rfloor \wedge \gamma \wedge \varphi \equiv \lceil \gamma \rfloor \wedge \gamma \wedge \psi$ on pätevä oletuksilla Γ.

34. Perustele, että $\varphi \Leftrightarrow \psi$ on pätevä oletuksilla Γ ja γ, jos ja vain jos $\gamma \wedge \varphi \Leftrightarrow \gamma \wedge \psi$ on pätevä oletuksilla Γ!

$\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \;\Rightarrow\; \mathfrak{f} = \mathfrak{h}$ [40]

$$\varphi \to \psi \;\equiv\; \neg\varphi \vee \psi$$
$$\varphi \leftrightarrow \psi \;\equiv\; (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

$\to$	F	U	T
F	T	T	T
U	U	U	T
T	F	U	T

$\leftrightarrow$	F	U	T
F	T	U	F
U	U	U	U
T	F	U	T

[41]

Kaksiarvoisessa logiikassa $\varphi \Rightarrow \psi$ jos ja vain jos $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \mathsf{T}$,
ja $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jos ja vain jos $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \mathsf{T}$. [42]

$\varphi \Rightarrow \psi$ jos ja vain jos $\varphi \wedge \lceil \varphi \rfloor \to \psi \wedge \lceil \psi \rfloor \Leftrightarrow \mathsf{T}$, ja
$\varphi \Leftrightarrow \psi$ jos ja vain jos $\varphi \wedge \lceil \varphi \rfloor \leftrightarrow \psi \wedge \lceil \psi \rfloor \Leftrightarrow \mathsf{T}$. [43]

35. Lue Wikipedian sivu ”Drinker paradox”. Kuvittele, että baarissa on vain kaksi asiakasta, Kahvinen ja Limsala. Tällöin ”baarissa on sellainen asiakas, että jos hän juo, niin jokainen asiakas juo” tarkoittaa samaa kuin ”jos Kahvinen juo niin molemmat juovat, tai jos Limsala juo niin molemmat juovat”. Tarkoittakoon K että Kahvinen juo, ja L että Limsala juo. Miten juomarin paradoksi voidaan purkaa tämän kurssin tarjoamilla keinoilla?

36. Kuinka monta alkiota rengaspuskuriin mahtuu enintään?

37. Kirjoita aliohjelma `int määrä()`, joka kertoo, kuinka monta alkiota rengaspuskurissa on!

38. Kirjoita ohjelmanpätkä, joka vertaa kahdesta rengaspuskurista `R` ja `S`, onko niissä sama sisältö. Viittaa niiden kenttiin tyyliin `R.taulu`, `S.vanhin` ja niin edelleen!

Jos $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n$ ovat määritellyt ja φ ja ψ eivät sisällä symboleita $\forall$ ja $\exists$, niin

- laista $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ saa johtaa kaavan $\varphi(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n)$, [44]
- oletuksesta $\psi(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n)$ ja laista $\psi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ saa johtaa kaavan $\varphi(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n)$, [45]
- laista $\psi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ saa johtaa $\psi(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) \Rightarrow \varphi(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n)$, [46]
- laista $\psi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ saa johtaa $\psi(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) \Leftrightarrow \varphi(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n)$ ja [47]
- laista $\psi(a_1, \ldots, a_n) \equiv \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ saa johtaa $\psi(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) \equiv \varphi(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n)$. [48]

7 Reaaliluvut ja niiden yhtälöt

39. Piirrä lausekkeen $(4x)^3$ lausekepuu!

40. Piirrä lausekkeen $4(x^3)$ lausekepuu!

41. Tarkoittaako $4x^3$ samaa kuin $(4x)^3$ vai samaa kuin $4(x^3)$?

42. Miten päättelysääntöä [17] on käytetty päättelyaskeleessa $(a+b)(a+-b) = a(a+-b)+b(a+-b)$?

Jos $\lceil \mathfrak{h} \rfloor$, niin $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \ \equiv \ \mathfrak{f}+\mathfrak{h} = \mathfrak{g}+\mathfrak{h}$.
Jos $\lceil \mathfrak{h} \rfloor$, niin $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \ \equiv \ \mathfrak{f}-\mathfrak{h} = \mathfrak{g}-\mathfrak{h}$. [49]

Jos $\mathfrak{h} \neq 0$, niin $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \ \equiv \ \mathfrak{f}\mathfrak{h} = \mathfrak{g}\mathfrak{h}$.
Jos $\mathfrak{h} \neq 0$, niin $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \ \equiv \ \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{h}} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$. [50]

43. Miten päättelysääntöjä [13], [16], [14], [32], [19] ja [2] käyttäen voidaan oletuksesta $\mathfrak{h} \neq 0$ ja reaaliluvuilla pätevistä ehdollisista yhtäsuuruuksista johtaa $\mathfrak{f}\mathfrak{h} = \mathfrak{g}\mathfrak{h} \Rightarrow \frac{\mathfrak{f}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}} = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}} \Leftrightarrow \mathfrak{f} = \mathfrak{g}$?

44. Jos ei oleteta $\mathfrak{h} \neq 0$, niin miltä osin $\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{h}} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \ \Rightarrow \ \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{h}} \cdot \mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \cdot \mathfrak{h} \ \Leftrightarrow \ \mathfrak{f} = \mathfrak{g}$ säilyy pätevänä ja miltä osin se menee rikki? Tarkastele ”$\Leftrightarrow$”:n kumpikin suunta erikseen!

$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} \ \Leftrightarrow \ \mathfrak{g} \neq 0 \land \mathfrak{f} = \mathfrak{g}\mathfrak{h}$ [51]

$a \geq 0 \ \Rightarrow \ \sqrt{a} \geq 0 \land \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ [52]

Jos $a < 0$, niin $\sqrt{a}$ ei ole määritelty. [53]

45. Kirjoita sellainen $\varphi(x,y)$, että siinä ei ole neliöjuuria tms., ja $\sqrt{\mathfrak{f}} = \mathfrak{g} \Leftrightarrow \varphi(\mathfrak{f},\mathfrak{g})$! Vielä ei tarvitse perustella vastaustasi!

$\mathfrak{f}\mathfrak{g} = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{f} = 0 \wedge \lceil \mathfrak{g} \rfloor \vee \mathfrak{g} = 0 \wedge \lceil \mathfrak{f} \rfloor$ [54]

$\sqrt{a^2} = |a|$ [55]

46. Perustele tehtävän 45 vastauksesi!

8 Lisää päättelemistä propositiologiikan keinoin

Jos $\psi \Rightarrow \chi$ ja X ei ole $\varphi(X)$:ssä muiden symbolien alaisuudessa kuin $\wedge$, $\vee$ ja parillinen määrä $\neg$, niin $\varphi(\psi) \Rightarrow \varphi(\chi)$.
Kaksiarvologiikassa jos $\psi \Rightarrow \chi$ ja X ei ole $\varphi(X)$:ssä muiden symbolien alaisuudessa kuin $\wedge$, $\vee$ ja pariton määrä $\neg$, niin $\varphi(\chi) \Rightarrow \varphi(\psi)$. [56]

Missä tahansa tilanteessa joko $\varphi(\mathsf{U})$ tuottaa U,
tai $\varphi(\mathsf{F})$ ja $\varphi(\mathsf{T})$ tuottavat saman kuin $\varphi(\mathsf{U})$. [57]

Jos $\varphi \Leftrightarrow \psi$ pätee kaksiarvologiikassa, jos φ ja ψ eivät sisällä muuta kuin F, T, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, (,) ja propositiomuuttujia, ja jos mikään propositiomuuttuja ei esiinny φ:ssä sekä parillisen että parittoman määrän $\neg$ alaisuudessa ja samoin ψ:lle, niin $\varphi \equiv \psi$ pätee kolmiarvologiikassa. [58]

Olkoon $\mathfrak{f}_\perp$ määrittelemätön lauseke. Missä tahansa tilanteessa joko $\varphi(\mathfrak{f}_\perp)$ tuottaa U, tai $\varphi(a)$ tuottaa saman kuin $\varphi(\mathfrak{f}_\perp)$ kun a on mikä tahansa puheenaiheen alkio. [59]

Jos $\lceil \mathfrak{f} \rfloor \Rightarrow \mathfrak{f} = \mathfrak{g}$, niin $\varphi(\mathfrak{f}) \Rightarrow \varphi(\mathfrak{g})$. [60]

47. Eräs päättely etenee ”Jos jollakin x:n arvolla sekä $\chi(x)$ että $\varphi(x)$ tuottaa T, niin … Jos jollakin x:n arvolla $\chi(x)$ tuottaa T ja $\varphi(x)$ ei tuota T, niin … Samoin käy jos jollakin x:n arvolla $\chi(x)$ tuottaa U ja $\varphi(x)$ ei tuota T.” Mitkä tapaukset ovat jäljellä?

9 Reaalilukujen suuruusjärjestys

Jokaisessa mahdollisessa tilanteessa pätee täsmälleen yksi seuraavista: $\mathfrak{f}$ tai $\mathfrak{g}$ tai molemmat ovat määrittelemättömiä, $\mathfrak{f} < \mathfrak{g}$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$ tai $\mathfrak{g} < \mathfrak{f}$. [61]

48. Osoita käyttäen lakia $(a<b\lor a=b\lor b<a)\land\neg(a<b\land a=b)\land\neg(a<b\land b<a)$ ja käyttämättä mitään muita $<$:n lakeja, että myös $\neg(a=b\land b<a)$ on laki!

$$\mathfrak{f}<\mathfrak{g}<\mathfrak{h}\ \Rightarrow\ \mathfrak{f}<\mathfrak{h} \qquad [62]$$

Jos $\lceil\mathfrak{h}\rfloor$, niin $\mathfrak{f}<\mathfrak{g}\ \equiv\ \mathfrak{f}+\mathfrak{h}<\mathfrak{g}+\mathfrak{h}$.
Jos $\lceil\mathfrak{h}\rfloor$, niin $\mathfrak{f}<\mathfrak{g}\ \equiv\ \mathfrak{f}-\mathfrak{h}<\mathfrak{g}-\mathfrak{h}$. [63]

$$0<\mathfrak{f}\land 0<\mathfrak{g}\ \Rightarrow\ 0<\mathfrak{f}\mathfrak{g} \qquad [64]$$

49. Miksi $\mathfrak{f}<\mathfrak{g}<\mathfrak{h}\Rightarrow\mathfrak{f}<\mathfrak{h}$ ei tarvitse oletusta, että $\mathfrak{f}$ on määritelty? Miksi se ei tarvitse oletusta, että $\mathfrak{g}$ on määritelty? Miksi se ei tarvitse oletusta, että $\mathfrak{h}$ on määritelty?

$\mathfrak{f}>\mathfrak{g}$ tarkoittaa samaa kuin $\mathfrak{g}<\mathfrak{f}$.
$\mathfrak{f}\leq\mathfrak{g}$ tarkoittaa samaa kuin $\mathfrak{f}<\mathfrak{g}\lor\mathfrak{f}=\mathfrak{g}$. [65]
$\mathfrak{f}\geq\mathfrak{g}$ tarkoittaa samaa kuin $\mathfrak{g}<\mathfrak{f}\lor\mathfrak{f}=\mathfrak{g}$ tarkoittaa samaa kuin $\mathfrak{f}>\mathfrak{g}\lor\mathfrak{f}=\mathfrak{g}$.

$$b>0\ \Leftrightarrow\ \tfrac{1}{b}>0 \ \text{ ja }\ b<0\ \Leftrightarrow\ \tfrac{1}{b}<0\ . \qquad [66]$$

50. Miten $\leq$ voidaan muodostaa, jos $<$ on käytettävissä, mutta $=$ ei ole?

51. Miten $\neq$ voidaan muodostaa, jos $<$ on käytettävissä, mutta $=$ ei ole?

Tehtävien 52, ..., 54 vastauksissa pitää näyttää lakien [61], ..., [64] käytöt, mutta muiden lakien käyttöjä ei tarvitse näyttää (vaikka mallivastauksissa niitäkin on näytetty).

52. Osoita, että $a<b\Leftrightarrow a+c<b+c$ seuraa siitä, että $0<a\Leftrightarrow b<a+b$ on laki!

53. Osoita käyttämättä muita $<$:n lakeja kuin [61], ..., [64], että $0<1$. Saat käyttää tietoa, että $1\neq 0$!

54. Osoita käyttämättä muita $<$:n lakeja kuin [61], ..., [64], että jos $a<0$ ja $b<0$, niin $0<ab$!

$$\mathfrak{h}\neq 0\land\mathfrak{f}<\mathfrak{g}\ \Leftrightarrow\ \mathfrak{h}<0\land\mathfrak{f}\mathfrak{h}>\mathfrak{g}\mathfrak{h}\ \lor\ \mathfrak{h}>0\land\mathfrak{f}\mathfrak{h}<\mathfrak{g}\mathfrak{h}$$
$$\mathfrak{h}\neq 0\land\mathfrak{f}<\mathfrak{g}\ \Leftrightarrow\ \mathfrak{h}<0\land\tfrac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{h}}>\tfrac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}\ \lor\ \mathfrak{h}>0\land\tfrac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{h}}<\tfrac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \qquad [67]$$

55. Täydennä päättelysäännön [67] perustelu!

$$\tfrac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}<\mathfrak{h}\ \Leftrightarrow\ \mathfrak{g}<0\land\mathfrak{f}>\mathfrak{g}\mathfrak{h}\lor\mathfrak{g}>0\land\mathfrak{f}<\mathfrak{g}\mathfrak{h} \qquad [68]$$

$$\mathfrak{f}\leq\mathfrak{g}\land\mathfrak{f}\geq\mathfrak{g}\ \Leftrightarrow\ \mathfrak{f}=\mathfrak{g} \qquad [69]$$

56. Käyttäen tietoa $a^2\leq b\Rightarrow b\geq 0$, osoita $a^2\leq b\Leftrightarrow b\geq 0\land a^2\leq b$ käsittelemällä erikseen tilanteet, joissa $a^2\leq b$ on tosi, ja tilanteet, joissa se ei ole tosi. Käytä mahdollisimman vähän mitään muuta kuin totuusarvojen, yhtäpitävyyden ja päättelyimplikaation aivan perusominaisuuksia!

57. Käyttäen tietoa $a^2 \leq b \Rightarrow b \geq 0$, osoita $a^2 \leq b \Leftrightarrow b \geq 0 \wedge a^2 \leq b$ päättelysääntöjen [30], [35] ja niin edelleen avulla!

58. Johda $\vee$:n ja $\Leftrightarrow$:n päättelysääntöjen avulla $a = b = 0 \vee -\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow -\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$!

10 Predikaattilogiikkaa luonnollisille luvuille

$n > m \;\Leftrightarrow\; n \geq m+1$ [70]

$n \geq m$ jos ja vain jos on olemassa sellainen k, että $n = m+k$. [71]

$n+m \geq n$ [72]

Jos $n-m$ on määritelty, niin $n-m \leq n$. [73]

$n = 0 \vee n > 0$ [74]

$n > 0 \Rightarrow nm \geq m$ [75]

59. Oleta [71] ja osoita [74]!

Jos $d > 0$, niin $n = d(n \operatorname{div} d) + (n \bmod d)$ ja $n \bmod d < d$. [76]

$n \operatorname{div} 0$ ja $n \bmod 0$ eivät ole määritellyt. [77]

Jos $d > 0$, niin $n \bmod d = n - d(n \operatorname{div} d)$. [78]

Jos $d > 0$, niin $n \bmod d \leq n$. [79]

Jos $n < d$, niin $n \operatorname{div} d = 0$ ja $n \bmod d = n$. [80]

60. Laeissa [76], [78] ja [79] vaaditaan $d > 0$. Miksi sitä ei vaadita laissa [80]?

d on n:n *tekijä*, jos ja vain jos on olemassa sellainen k, että $n = dk$. [81]

$1 \mid n$ ja $n \mid n$ [82]

$d \mid 0$ [83]

Jos $n > 0$ ja $d \mid n$, niin $0 < d \leq n$. [84]

Jos $d \mid n$ ja $d \mid m$, niin $d \mid (n+m)$. [85]

```
unsigned gcd( unsigned n, unsigned m ){
  while( true ){
    if( m == 0 ){ return n; }
    n %= m;
    if( n == 0 ){ return m; }
    m %= n;
  }
}
```

Kuva 2: Moderni Eukleideen algoritmi

61. Oletamme, että $+$ ja $|$ tulkitaan tarkoittamaan sitä mitä edellä. Onko ilmaukselle $d \mid n+m$ olemassa muuta järkevää tulkintaa kuin että se tarkoittaa samaa kuin $d \mid (n+m)$?

    Jos $n \geq m$ ja $d \mid n$ ja $d \mid m$, niin $d \mid (n-m)$. [86]

    $d > 0 \wedge (d \mid n) \;\Leftrightarrow\; n \bmod d = 0$ [87]

    $\gcd(n,m)$ on suurin luku, joka on sekä n:n että m:n tekijä. [88]

    Jos $n > 0$, niin $0 < \gcd(n,m) = \gcd(m,n) \leq n$.
    Jos $m > 0$, niin $0 < \gcd(n,m) = \gcd(m,n) \leq m$. [89]

    $\gcd(0,0)$ ei ole määritelty. [90]

62. Olkoon $g = \gcd(n,m)$. Edellä nähtiin, että $\frac{n}{m}$ voidaan sieventää muotoon $\frac{n/g}{m/g}$. Miksi $\frac{n}{m}$ ei sievene tämän enempää, eli miksi ei ole olemassa sellaista luonnollista lukua $h > g$, että $\frac{n}{m}$ voidaan esittää muodossa $\frac{n/h}{m/h}$?

63. Edellä pääteltiin, että jos kuvan 2 algoritmin alussa $n > 0$ tai $m > 0$, niin lopputulokselle g pätee $g > 0$. Sen päättelemisessä käytettiin lakia [84] sekä tietoa, että lopputulos on parametrien yhteinen tekijä. Sen voi päätellä vaihtoehtoisesti melko lyhyesti suoraan ohjelmakoodista käyttämättä mitään lakia tai ennakkotietoa, joka koskee tekijöitä. Ei tarvitse edes tietää tarkalleen mitä `%=` tekee, vaan riittää tietää, että sen laskeminen ei tässä algoritmissa kaadu eikä muuta oikealla puolellaan olevan muuttujan arvoa. Esitä tällainen päättely!

64. Eukleideen omassa versiossa Eukleideen algoritmista ei laskettu $n := n \bmod m$ ja $m := m \bmod n$, vaan vähennettiin suuremmasta luvusta pienempi. Kirjoita niin saatu algoritmi. Testaa se laittamalla tietokone laskemaan suurin yhteinen tekijä jokaisella $n \leq 1000$ ja $m \leq 1000$ molemmilla algoritmeilla ja vertaamaan tulokset!

    Tehtävissä 65, …, 74 käsitellään vastauksen 64 algoritmia.

65. Osoita, että algoritmi ei tee mitään määrittelemätöntä!

66. Luettele muuttujien arvoja rivin i alussa esittäviä merkintöjä n_i ja m_i käyttäen kaikki tapaukset, joissa muuttujan arvo muuttuu. Kerro myös, mitä samalla tapahtuu toisen muuttujan arvolle. Lisää loppuun maininta, joka tavalla tai toisella kertoo, että luettelossasi on kaikki tapaukset!

67. Ilmaise merkintöjen n_i ja m_i avulla väite, että $n+m$ on silmukan rungon lopussa pienempi kuin se oli silmukan ehdon kohdalla!

68. Osoita, että kun silmukkaan tullaan sen edeltä, niin $n > 0$ ja $m > 0$!

69. Osoita, että jos silmukan rungon alussa $n > 0$ ja $m > 0$, niin myös silmukan rungon lopussa $n > 0$ ja $m > 0$!

70. Osoita, että algoritmi lopettaa!

71. Osoita, että jos d on n_1:n ja m_1:n tekijä, niin d on lopputuloksen tekijä!

72. Osoita, että lopputulos on n:n viimeisen arvon ja m:n viimeisen arvon tekijä!

73. Osoita, että lopputulos on n_1:n ja m_1:n tekijä!

74. Viimeistele todistus, että lopputulos on aina oikea!

11 Kvanttorit ja niiden lait

$\forall x : \varphi(x)$ tuottaa T jos ja vain jos $\varphi(x)$ tuottaa T jokaisella x:n arvolla.
$\forall x : \varphi(x)$ tuottaa F jos ja vain jos $\varphi(x)$ tuottaa F ainakin yhdellä x:n arvolla. [91]
Muussa tapauksessa $\forall x : \varphi(x)$ tuottaa U.

$\exists x : \varphi(x)$ tuottaa T jos ja vain jos $\varphi(x)$ tuottaa T ainakin yhdellä x:n arvolla.
$\exists x : \varphi(x)$ tuottaa F jos ja vain jos $\varphi(x)$ tuottaa F jokaisella x:n arvolla. [92]
Muussa tapauksessa $\exists x : \varphi(x)$ tuottaa U.

75. Määrittele kvanttoreiden avulla $serkku(x,y)$ yksinkertaisemmin kuin tehtävän 12 vastauksessa!

76. Perustele, että oletuksen $1 \leq x < y$ alaisuudessa on $\exists x : xy = 1$ reaaliluvuilla tosi!

Jos y ei esiinny $\varphi(x)$:ssä, niin
$\forall x : \varphi(x) \equiv \forall y : \varphi(y)$ ja $\exists x : \varphi(x) \equiv \exists y : \varphi(y)$. [93]

Jokaisessa edellä olleessa laissa tai säännössä, jossa kiellettiin $\forall$ ja $\exists$,
ne sallitaan sillä ehdolla, että mikään sijoitettavan lausekkeen tai kaavan [94]
(vapaa) muuttujasymboli ei joudu sidotuksi missään korvauskohdassa.

$\neg\forall x : \varphi(x) \equiv \exists x : \neg\varphi(x)$ $\qquad$ $\neg\exists x : \varphi(x) \equiv \forall x : \neg\varphi(x)$ [95]

77. Johda $\neg\exists x : \varphi \equiv \forall x : \neg\varphi$ käyttäen vain kaksoiskiellon poistoa, sääntöjä [24] ja [26] sekä lakia $\neg\forall x : \varphi \equiv \exists x : \neg\varphi$.

$\forall x : \forall y : \varphi(x,y) \equiv \forall y : \forall x : \varphi(x,y) \qquad \exists x : \exists y : \varphi(x,y) \equiv \exists y : \exists x : \varphi(x,y)$ [96]

$\exists x : \forall y : \varphi(x,y) \Rightarrow \forall y : \exists x : \varphi(x,y)$ [97]

Jos x:stä ei ole oletettu mitään ja $\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)$, niin $\forall x : \varphi(x) \Rightarrow \forall x : \psi(x)$ ja $\exists x : \varphi(x) \Rightarrow \exists x : \psi(x)$. [98]

$$\begin{aligned}
\forall x : \varphi(x) \wedge \psi(x) &\equiv (\forall x : \varphi(x)) \wedge (\forall x : \psi(x)) \\
\exists x : \varphi(x) \vee \psi(x) &\equiv (\exists x : \varphi(x)) \vee (\exists x : \psi(x)) \\
\forall x : \varphi(x) \vee \psi(x) &\Leftarrow (\forall x : \varphi(x)) \vee (\forall x : \psi(x)) \\
\exists x : \varphi(x) \wedge \psi(x) &\Rightarrow (\exists x : \varphi(x)) \wedge (\exists x : \psi(x))
\end{aligned} \qquad [99]$$

Jos x ei esiinny vapaana φ:ssä, niin
$\varphi \wedge \forall x : \psi(x) \equiv \forall x : \varphi \wedge \psi(x) \qquad \varphi \wedge \exists x : \psi(x) \equiv \exists x : \varphi \wedge \psi(x)$ [100]
$\varphi \vee \forall x : \psi(x) \equiv \forall x : \varphi \vee \psi(x) \qquad \varphi \vee \exists x : \psi(x) \equiv \exists x : \varphi \vee \psi(x)$.

Jos $\mathfrak{f}$ on määritelty ja mikään sen muuttujasymboli ei ole sidottu minkään vapaan x kohdalla $\varphi(x)$:ssä, niin $\forall x : \varphi(x) \Rightarrow \varphi(\mathfrak{f})$. [101]

Jos muuttujasymbolista x ei ole oletettu mitään, niin $\varphi(x) \Rightarrow \forall x : \varphi(x)$. [102]

Jos mikään $\mathfrak{f}$:n muuttujasymboli ei ole sidottu minkään vapaan x kohdalla $\varphi(x)$:ssä, niin $\varphi(\mathfrak{f}) \Rightarrow \exists x : \varphi(x)$. [103]

Jos muuttujasymboli c ei esiinny aiemmin, $\varphi(x)$:ssä eikä ψ:ssä, ja jos $\varphi(c) \Rightarrow \psi$, niin $\exists x : \varphi(x) \Rightarrow \psi$. [104]

78. Perustele vetoamalla kaavojen $x = 0$ ja $\frac{1}{x} = 0$ totuusarvoihin x:n eri arvoilla, että $\forall x : x = 0 \Rightarrow \exists x : x = 0$ on pätevä ja että $\forall x : \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \exists x : \frac{1}{x} = 0$ on pätevä.

79. Perustele, että $\forall x ; \frac{1}{x} = 0 : x = 0 \Rightarrow \exists x ; \frac{1}{x} = 0 : x = 0$ ei ole pätevä.

80. Osoita, että kaavavertailun $\forall x ; \chi(x) : \varphi(x) \Rightarrow \exists x ; \chi(x) : \varphi(x)$ vastaesimerkit ovat täsmälleen ne kaavat χ ja φ, joille $\chi(x)$ ei tuota T millään x:n arvolla, ja $\varphi(x)$ tuottaa T jokaisella x:n arvolla, jolla $\chi(x)$ tuottaa U!

12 Modernin logiikan suuria tuloksia

13 Lopuksi

Tehtävien vastauksia

1. Voi ajatella niin, että sanassa ”hyvää” kaksi viimeistä kirjainta ovat sama (nimittäin ”ä”) ja myös sanassa ”ruokaa” kaksi viimeistä kirjainta ovat sama (nimittäin ”a”). Vaihtoehtoisesti voi ajatella, että sanojen ”söin” ja ”salaatin” viimeinen kirjain on sama (nimittäin ”n”) ja toiseksi viimeinen kirjain on sama (nimittäin ”i”). Tarkoitus oli, että huomaisit molemmat ajattelutavat ja hoksaisit, että ”kahdessa viimeisessä sanassa kaksi viimeistä kirjainta ovat samat” on monikäsitteinen.

2. [1]:n mukaan *kaava* $\Leftrightarrow \mathsf{T}$ tarkoittaa, että jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa *kaava* on tosi, myös T on tosi, ja päinvastoin. Koska T on aina tosi, se tarkoittaa, että jokaisessa mahdollisessa tilanteessa *kaava* on tosi. Se puolestaan tarkoittaa, että jokaisessa mahdollisessa tilanteessa *kaava* tuottaa T.

3. Jos $a = b = -1$, niin $\sqrt{ab} = 1$, mutta $\sqrt{a}\sqrt{b}$ ei ole 1 vaan määrittelemätön.

4. Vastaukseksi kelpaa P tosi ja Q epätosi. Vastaukseksi kelpaa myös P epätosi ja Q tosi.

5. φ:n tilalla on P ja ψ:n tilalla on T.

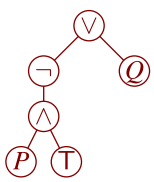
6. φ

7. R ja F. Ratkaisu sieventämällä: $(\mathsf{F} \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow \mathsf{F} \vee R \Leftrightarrow R$ ja $\mathsf{F} \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow \mathsf{F}$. Ratkaisu totuustaululla:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$Q \vee R$	$(P \wedge Q) \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$
F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	F
F	T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F

8. $P \vee Q \wedge R \;\Leftrightarrow\; (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
   $P \wedge (Q \vee R) \;\Leftrightarrow\; P \wedge Q \vee P \wedge R$

9. $\neg P \vee \neg(Q \vee R)$, $\neg(P \wedge (Q \vee R))$, $\neg(P \vee Q \wedge R)$ ja $\neg(P \vee (Q \vee R))$.

10. 

11. $x \hookleftarrow \mathsf{Diana} \;\Leftrightarrow\; x = \mathsf{William} \vee x = \mathsf{Harry}$

12. $\mathit{serkku}(\,x,y\,) \;\Leftrightarrow$
$$\begin{array}{ll} (& \mathit{sisarus}(\,\mathit{vanhA}(\,x\,),\mathit{vanhA}(\,y\,)\,) \vee \mathit{sisarus}(\,\mathit{vanhA}(\,x\,),\mathit{vanhB}(\,y\,)\,) \;\vee \\ & \mathit{sisarus}(\,\mathit{vanhB}(\,x\,),\mathit{vanhA}(\,y\,)\,) \vee \mathit{sisarus}(\,\mathit{vanhB}(\,x\,),\mathit{vanhB}(\,y\,)\,) \\ ) & \wedge \;\; x \neq y \end{array}$$

13.

		koska aiemmin kerrottu
	$\mathit{sisarus}(\,\mathit{puoliso}(\,\mathit{vanhA}(\,\mathsf{Lilibet}\,)\,),\mathsf{William}\,)$	
$\Leftrightarrow$	$\mathit{sisarus}(\,\mathit{puoliso}(\,\mathsf{Meghan}\,),\mathsf{William}\,)$	$\mathit{vanhA}(\,\mathsf{Lilibet}\,) = \mathsf{Meghan}$
$\Leftrightarrow$	$\mathit{sisarus}(\,\mathsf{Harry},\mathsf{William}\,)$	$\mathit{puoliso}(\,\mathsf{Meghan}\,) = \mathsf{Harry}$
$\Leftrightarrow$	T	$\mathit{sisarus}(\,\mathsf{Harry},\mathsf{William}\,) \Leftrightarrow \mathsf{T}$

Niinpä $\mathit{sisarus}(\,\mathit{puoliso}(\,\mathit{vanhA}(\,\mathsf{Lilibet}\,)\,),\mathsf{William}\,) \Leftrightarrow \mathsf{T}$.

14. Jos jollekin henkilölle x $\mathit{vanhA}(\,x\,)$ tai $\mathit{vanhB}(\,x\,)$ tai kumpikaan ei ole määritelty, niin $\mathit{vanhA}(\,x\,) \neq \mathit{vanhB}(\,x\,)$ tuottaa U [13]. Silloin $\Leftrightarrow$:n toinen puoli on ja toinen puoli ei ole T, vastoin $\Leftrightarrow$:n määritelmää [1].

15. Jos x:llä ei ole puolisoa, niin $\neg\mathit{parisuhteessa}(\,x\,)$ on tosi, joten yhtäpitävyyden molemmat puolet ovat tosi. Jos x:llä on puoliso, niin vasen puoli on muotoa $\mathsf{F} \vee x \neq \mathit{puoliso}(\,x\,)$. Se on tosi jos ja vain jos x:n puoliso on joku muu kuin x itse.

16. C++:lla `!=`-vertailut tuottivat `true` ja muut tuottivat `false`.

17. $1 - \frac{\log(2x+1)}{-x} \geq 0 \wedge -x \neq 0 \wedge 2x+1 > 0$

18. $\mathfrak{h}(x)$ on $\mathit{vanhB}(\,\mathit{puoliso}(\,x\,)\,)$
$\mathfrak{f}$ on $\mathit{vanhA}(\,\mathsf{Lilibet}\,)$
$\mathfrak{g}$ on Meghan
$\mathfrak{h}(\mathfrak{f})$ on $\mathit{vanhB}(\,\mathit{puoliso}(\,\mathit{vanhA}(\,\mathsf{Lilibet}\,)\,)\,)$
$\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ on $\mathit{vanhB}(\,\mathit{puoliso}(\,\mathsf{Meghan}\,)\,)$

19. $\mathfrak{h}(x)$ on $a^2 + x + b^2$
$\mathfrak{f}$ on $ab + ba$
$\mathfrak{g}$ on $2ab$
$\mathfrak{h}(\mathfrak{f})$ on $a^2 + (ab + ba) + b^2$
$\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ on $a^2 + 2ab + b^2$

20. $\sqrt{(2x+a)^2} = -(2x+a) \vee 2x + a > 0$

21. Koska $a = a$ on laki, voidaan valita $\mathfrak{f}(a)$:ksi a ja $\mathfrak{g}(a)$:ksi a. Valitsemalla $\mathfrak{h}$:ksi $\frac{1}{0}$ saadaan $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$.

22. $$\begin{aligned} & x \leq 2 \land (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ \lor\ \ & 2 < x < 3 \land (y = 0 \lor y = 2) \\ \lor\ \ & x \geq 3 \land (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{aligned}$$

23. $\mathfrak{f}$ on $a-a$, $\mathfrak{g}$ on 0 ja $\varphi(x)$ on $x < b-a$.

24. Käytetään päättelysääntöä [22]. Nyt $\varphi(X)$ on $X \land 3x-2y=2$, ψ on $2x-y=3$ ja χ on $y=2x-3$.

25. Tekemällä samanlainen taulukko kuin luentoruuduissa saadaan $\lceil \varphi \lor \psi \rfloor \Leftrightarrow \lceil \varphi \rfloor \land \lceil \psi \rfloor \lor \lceil \varphi \rfloor \land \varphi \lor \lceil \psi \rfloor \land \psi$.

$\lor$	F	U	T
F	F	U	T
U	U	U	T
T	T	T	T

26. Jos $\varphi \equiv \mathsf{F}$, niin $\varphi \lor (\neg\varphi \land \psi) \equiv \psi$. Se vastaa sitä, että jos `eka` tuottaa `false`, niin lasketaan `toka` ja palautetaan sen tulos koko toiminnon tuloksena. Jos tällöin `toka` kaatuu, niin `eka || toka` kaatuu, mikä vastaa sitä, että jos $\psi \equiv \mathsf{U}$, niin $\mathsf{F} \lor (\neg\mathsf{F} \land \psi) \equiv \mathsf{U}$. Jos $\varphi \equiv \mathsf{T}$, niin $\varphi \lor (\neg\varphi \land \psi) \equiv \mathsf{T}$. Se vastaa sitä, että jos `eka` tuottaa `true`, niin ei lasketa `toka` vaan palautetaan `true` koko toiminnon tuloksena. Jos $\varphi \equiv \mathsf{U}$, niin $\varphi \lor (\neg\varphi \land \psi) \equiv \mathsf{U}$. Se vastaa sitä, että jos `eka` kaatuu, niin `eka || toka` kaatuu.

27. $$\begin{aligned} & \neg(P \land \neg(Q \land \neg R \land (\neg Q \lor P)) \lor \neg Q \land R) \\ \equiv\ & \neg(P \land \neg(Q \land \neg R \land (\neg Q \lor P))) \land \neg(\neg Q \land R) \\ \equiv\ & (\neg P \lor (Q \land \neg R \land (\neg Q \lor P))) \land (Q \lor \neg R) \\ \equiv\ & (\neg P \lor Q \land \neg R \land (\neg Q \lor P)) \land (Q \lor \neg R) \end{aligned}$$

28. $$\begin{aligned} & \varphi \lor (\psi \land \chi) & \\ \equiv\ & \neg\neg(\varphi \lor (\psi \land \chi)) & \text{kaksoiskiellon poisto takaperin [24]} \\ \equiv\ & \neg(\neg\varphi \land \neg(\psi \land \chi)) & \text{De Morganin laki [26]} \\ \equiv\ & \neg(\neg\varphi \land (\neg\psi \lor \neg\chi)) & \text{De Morganin laki [26]} \\ \equiv\ & \neg((\neg\varphi \land \neg\psi) \lor (\neg\varphi \land \neg\chi)) & \text{annettu laki [26]} \\ \equiv\ & \neg(\neg\varphi \land \neg\psi) \land \neg(\neg\varphi \land \neg\chi) & \text{De Morganin laki} \\ \equiv\ & (\neg\neg\varphi \lor \neg\neg\psi) \land (\neg\neg\varphi \lor \neg\neg\chi) & \text{De Morganin laki [26]} \\ \equiv\ & (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi) & \text{kaksoiskiellon poisto [26]} \end{aligned}$$

29. $$\begin{aligned} & \lceil \varphi \lor \psi \rfloor & \\ \equiv\ & \lceil \neg(\varphi \lor \psi) \rfloor & \lceil \neg\varphi \rfloor \equiv \lceil \varphi \rfloor \text{ takaperin [24]} \\ \equiv\ & \lceil \neg\varphi \land \neg\psi \rfloor & \text{De Morganin laki [26]} \\ \equiv\ & \lceil \neg\varphi \rfloor \land \lceil \neg\psi \rfloor \lor \lceil \neg\varphi \rfloor \land \neg\neg\varphi \lor & \text{annettu laki} \\ & \lceil \neg\psi \rfloor \land \neg\neg\psi & \\ \equiv\ & \lceil \varphi \rfloor \land \lceil \psi \rfloor \lor \lceil \varphi \rfloor \land \varphi \lor \lceil \psi \rfloor \land \psi & \lceil \neg\varphi \rfloor \equiv \lceil \varphi \rfloor\text{, kaksoiskiellon poisto [26]} \end{aligned}$$

30. Siinä *vasen* ja *oikea* ovat sama kaava. Niinpä aina kun *vasen* on tosi, myös *oikea* on tosi, joten [28] toteutuu.

31. $\top$

32. (a) Kunkin möläyttimen `M`, jonka pituus on alle 10^n, tulos on osa `möö`:n tulosta. Lisäksi `möö`:n tulos sisältää ainakin ”`Möläyttimien tuotoksia peräkkäin: `”. Niinpä `möö`:n tulos on pitempi kuin `M`:n tulos, joten `M`:n tulos ei ole sama kuin `möö`:n tulos.

    (b) Koska `möö` on möläytin jonka pituus on $n+k$, ja mikään möläytin jonka pituus on alle 10^n ei palauta samaa merkkijonoa kuin `möö`, ei voi olla $n+k < 10^n$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että jos n on tarpeeksi suuri, niin $10^n > n+k$. Esimerkiksi jos $n = k$, niin $10^n > 2n = n+k$.

33.

$\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$	[34]	$\varphi \Rightarrow \psi \vee \varphi$	[37]
$\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$	[33]	$\psi \Rightarrow \psi \vee \varphi$	[36]
$\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi \wedge \varphi$	[35]	$\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi \vee \varphi$	[38]
$\psi \wedge \varphi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$	edellinen	$\psi \vee \varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$	edellinen
$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$	[30]	$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$	[30]

34. Tämän voi ratkaista ainakin kahdella tavalla. Riittää tarkastella tilanteet, joissa Γ on tosi.

    Jos $\varphi \Leftrightarrow \psi$ oletuksella γ, niin $\varphi \Rightarrow \psi$ oletuksella γ [30]. Jo todistettu [39]:n osuus tuottaa $\gamma \wedge \varphi \Rightarrow \psi$. Koska $\gamma \wedge \varphi \Rightarrow \gamma$ [33], saadaan $\gamma \wedge \varphi \Rightarrow \gamma \wedge \psi$ [35]. Samalla tavalla saadaan $\gamma \wedge \psi \Rightarrow \gamma \wedge \varphi$. Niistä [30] tuottaa $\gamma \wedge \varphi \Leftrightarrow \gamma \wedge \psi$. Toisaalta jos $\gamma \wedge \varphi \Leftrightarrow \gamma \wedge \psi$, niin $\gamma \wedge \varphi \Rightarrow \gamma \wedge \psi \Rightarrow \psi$ [30,34]. Jo todistettu [39]:n osuus tuottaa $\varphi \Rightarrow \psi$ oletuksella γ. Samalla tavalla saadaan $\psi \Rightarrow \varphi$ oletuksella γ. Niistä [30] tuottaa $\varphi \Leftrightarrow \psi$ oletuksella γ.

    Tilanne, jossa γ ei tuota $\top$, ei ole kummankaan vastaesimerkki, koska oletuksen γ alaisuudessa se ei ole mahdollinen ja koska yhtäpitävyyden $\gamma \wedge \varphi \Leftrightarrow \gamma \wedge \psi$ kumpikaan puoli ei siinä tuota $\top$. Muissa tilanteissa γ tuottaa $\top$. Silloin φ tuottaa saman totuusarvon kuin $\gamma \wedge \varphi$, ja ψ tuottaa saman totuusarvon kuin $\gamma \wedge \psi$. Niinpä tilanne on vastaesimerkki joko molemmille tai ei kummallekaan yhtäpitävyyksistä $\varphi \Leftrightarrow \psi$ ja $\gamma \wedge \varphi \Leftrightarrow \gamma \wedge \psi$.

35. Ilmauksen ”jos … niin …” formalisointi materiaalisena implikaationa vastaa kaavaa $(K \rightarrow K \wedge L) \vee (L \rightarrow K \wedge L)$. Jos Kahvinen ei juo, niin $K \rightarrow K \wedge L$ ja samalla koko kaava tuottaa $\top$. Vastaavasti käy jos Limsala ei juo. Jos molemmat juovat, niin $K \wedge L$ ja samalla koko kaava tuottaa $\top$. Mutta jos ”jos … niin …” formalisoidaan päättelyimplikaationa niin saadaan, että $K \Rightarrow K \wedge L$ on pätevä päättelysääntö tai $L \Rightarrow K \wedge L$ on pätevä päättelysääntö.

Mutta kumpikaan niistä ei ole pätevä, sillä $K \equiv \mathsf{T}$ ja $L \equiv \mathsf{F}$ on vastaesimerkki ensimmäiselle ja $K \equiv \mathsf{F}$ ja $L \equiv \mathsf{T}$ on vastaesimerkki jälkimmäiselle.

Yleistä tapausta ei tehtävässä kysytty, mutta tässä on siitä hiukan pohdintaa siltä varalta että se sattuisi kiinnostamaan. Tosielämässä se, kuka juo, vaihtelee ajanhetkittäin. Siksi alkuperäinen virke voidaan tulkita kahdella eri tavalla: ”joka hetki pätee, että baarissa on sellainen henkilö, että jos hän juo, niin jokainen juo” tai ”baarissa on sellainen henkilö, että joka hetki pätee, että jos hän juo, niin jokainen juo”.

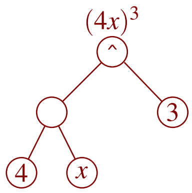
Esimerkissä käytettyyn eli niin sanottuun ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikkaan kuuluu, että relaatiosymboleiden merkitykset eivät muutu kesken kaiken — ei esimerkiksi ole niin, että $1 < 2$ on tänään tosi mutta huomenna epätosi. Siksi Wikipedian kaava $\exists x : (D(x) \rightarrow \forall y : D(y))$ kiinnittää D:n, eli ikään kuin valitsee yhden ajanhetken ja jäädyttää tilanteen sen mukaiseksi. Koska Wikipedian kaava on tosi riippumatta siitä mikä D:n arvo sattui olemaan eli ketkä sattuivat sillä hetkellä juomaan, on sen mukaan totta, että ”joka hetki pätee, että ...”. Niinpä Wikipedian selitys vastaa ensimmäistä tulkintaa. (Ajanhetkistä puhuminen ei ole teknisesti oikein vaan pitäisi vain puhua D:n eri arvoista, mutta asian ydin on helpompi tajuta ajanhetkien avulla.)

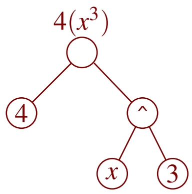
Paradoksi syntyy siitä, että lukija käyttää jälkimmäistä tulkintaa, eikä huomata että käytetään eri tulkintoja. (Ainakin tämän kirjoittajan mielestä jälkimmäinen tulkinta on luontevampi, eikä Wikipedia saisi pitää ensimmäistä tulkintaa itsestään selvänä.)

36. `koko` $- 1$

37. `int määrä(){ return (vapaa + koko - vanhin) % koko; }`

38.
```
if( R.määrä() != S.määrä() ){ return false; }
int i = R.vanhin, j = S.vanhin;
while( i != r.vapaa ){
  if( R.taulu[ i ] != S.taulu[ j ] ){ return false; }
  i = (i + 1) % R.koko; j = (j + 1) % S.koko;
}
return true;
```

39. 

40. 

41. Samaa kuin $4(x^3)$.

42. Lakina on $(x+y)z = xz+yz$, $\mathfrak{f}(x,y,z)$ on $(x+y)z$, $\mathfrak{g}(x,y,z)$ on $xz+yz$, $\mathfrak{h}_x$ on a, $\mathfrak{h}_y$ on b, $\mathfrak{h}_z$ on $a+-b$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{h}_x,\mathfrak{h}_y,\mathfrak{h}_z)$ on $(a+b)(a+-b)$ ja $\mathfrak{g}(\mathfrak{h}_x,\mathfrak{h}_y,\mathfrak{h}_z)$ on $a(a+-b)+b(a+-b)$.

43. Ensin päätellään, että koska $\mathfrak{f}\mathfrak{h} = \mathfrak{g}\mathfrak{h}$ ja $\mathfrak{h} \neq 0$, ovat $\mathfrak{f}\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ ja $\mathfrak{h}$ määritellyt [13]. Koska jakolasku on määritelty kun jakaja ei ole 0, on myös $\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}}$ määritelty. Niinpä voidaan käyttää päättelysääntöä [16] valitsemalla sen $\mathfrak{f}$:ksi $\mathfrak{f}\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$:ksi $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ ja $\mathfrak{h}(x)$:ksi $\frac{x}{\mathfrak{h}}$. Siten saadaan $\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}} = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}}$. Olemme oletuksesta $\mathfrak{h} \neq 0$ osoittaneet $\mathfrak{f}\mathfrak{h} = \mathfrak{g}\mathfrak{h} \Rightarrow \frac{\mathfrak{f}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}} = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}}$. Siitä, että $\mathfrak{f}\mathfrak{h}$ ja $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ ovat määritellyt, seuraa että $\mathfrak{f}$ ja $\mathfrak{g}$ ovat määritellyt [14]. Niinpä laista $b \neq 0 \Rightarrow \frac{ab}{b} = a$ seuraa $\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}} = \mathfrak{f}$ ja $\frac{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}} = \mathfrak{g}$ [32]. Valitsemalla [19]:n $\mathfrak{f}$:ksi $\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}}$ ja $\mathfrak{g}$:ksi $\mathfrak{f}$ saadaan $\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}} = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}} \Leftrightarrow \mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}}$. Valitsemalla [19]:n $\mathfrak{f}$:ksi $\frac{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}}$ ja $\mathfrak{g}$:ksi $\mathfrak{g}$ saadaan $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}} \Leftrightarrow \mathfrak{f} = \mathfrak{g}$. Kahdesta viimeksi mainitusta saadaan $\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}} = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}} \Leftrightarrow \mathfrak{f} = \mathfrak{g}$ [2].

44. Kun $\mathfrak{h} = 0$ ja $\mathfrak{f}$ ja $\mathfrak{g}$ tuottavat saman määritellyn arvon (esim. kumpikin on x), ei $\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{h}} \cdot \mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \cdot \mathfrak{h} \Leftarrow \mathfrak{f} = \mathfrak{g}$ päde, koska silloin sen oikea puoli tuottaa T mutta vasen puoli tuottaa U. Siksi yhtäpitävyys $\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{h}} \cdot \mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \cdot \mathfrak{h} \Leftrightarrow \mathfrak{f} = \mathfrak{g}$ pitää korvata implikaatiolla ”$\Rightarrow$”. Niin saadaan $\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{h}} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \Rightarrow \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{h}} \cdot \mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \cdot \mathfrak{h} \Rightarrow \mathfrak{f} = \mathfrak{g}$. Kun $\mathfrak{h} = 0$, niin sen kummankin implikaation vasen puoli tuottaa U [13], joten implikaatiot säilyvät pätevinä [28].

45. $\mathfrak{g} \geq 0 \wedge \mathfrak{f} = \mathfrak{g}^2$

46. Jos $\mathfrak{f}$ tai $\mathfrak{g}$ tai kumpikaan ei ole määritelty, niin $\sqrt{\mathfrak{f}} = \mathfrak{g}$ tuottaa U ja $\mathfrak{g} \geq 0 \wedge \mathfrak{f} = \mathfrak{g}^2$ tuottaa F tai U [14,13,9], joten kumpikaan puoli ei tuota T. Muussa tapauksessa olkoon $\mathfrak{f}$:n tuottama luku a ja $\mathfrak{g}$:n tuottama b.

    Jos $\sqrt{a} = b$, niin $\sqrt{a}$ on määritelty [13] joten $a \geq 0$ [53], ja $b \geq 0$ koska $\sqrt{a} \geq 0$ [52,19]. Niinpä $\sqrt{a} = b \Rightarrow b \geq 0$ [39]. Koska x^2 on aina määritelty, on b^2 määritelty. Valitsemalla $\mathfrak{h}(x)$:ksi x^2 [52] ja [16] tuottavat $a = \left(\sqrt{a}\right)^2 = b^2$. Niinpä $\sqrt{a} = b \Rightarrow a = b^2$ [39]. Siksi $\sqrt{a} = b \Rightarrow b \geq 0 \wedge a = b^2$ [35].

    Jos $a = b^2$ niin $a \geq 0$, joten $\sqrt{a}$ on määritelty [52]. Niinpä $\sqrt{a} = \sqrt{b^2} = |b|$ [16,55]. Jos lisäksi $b \geq 0$, niin $|b| = b$ [18], joten $\sqrt{a} = b$ [40]. Siksi $b \geq 0 \wedge a = b^2 \Rightarrow \sqrt{a} = b$ [39].

47. Jäljellä ovat tapaukset, joissa kullakin x:n arvolla joko $\chi(x)$ tuottaa F, tai $\chi(x)$ tuottaa U ja $\varphi(x)$ tuottaa T. Osuudet ”jollakin x:n arvolla sekä $\chi(x)$ että $\varphi(x)$ tuottaa T” ja ”jollakin x:n arvolla $\chi(x)$ tuottaa T ja $\varphi(x)$ ei tuota T” kattavat yhdessä täsmälleen ne tapaukset, joissa jollakin x:n arvolla $\chi(x)$ tuottaa T. Tässä vaiheessa jäljellä ovat siis täsmälleen ne, joissa millään x:n arvolla $\chi(x)$ ei tuota T, eli ne, joissa kullakin x:n arvolla $\chi(x)$ tuottaa U tai F. Osuus ”jollakin x:n arvolla $\chi(x)$ tuottaa U ja $\varphi(x)$ ei tuota T” sulkee niistä osan pois, jolloin jäljelle jäävät ne, joissa kullakin x:n arvolla joko $\chi(x)$ tuottaa U ja $\varphi(x)$ tuottaa T, tai $\chi(x)$ tuottaa F.

48. Koska tehtävässä annettu kaava on laki, se pätee kun a:n ja b:n tilalla on mitkä tahansa määritellyt lausekkeet [44]. Se pätee siis myös kun a:n tilalla on b ja päinvastoin. Niin muutettu kaava on muotoa *vasen* $\wedge$ *keskimmäinen* $\wedge$ *oikea*. Siitä seuraa *keskimmäinen* [33,34]. Niinpä $\neg(b < a \wedge b = a)$ pätee. Lakien [27] ja [25] sekä päättelysäännön [26] vuoksi $\neg(b < a \wedge b = a) \equiv \neg(b = a \wedge b < a) \equiv \neg(a = b \wedge b < a)$. Koska $\neg(a = b \wedge b < a)$ johdettiin tekemättä oletuksia, se on laki [11].

49. Jos jokin niistä ei ole määritelty, niin $\Rightarrow$:n vasen puoli on määrittelemätön tai epätosi [13,9]. Niinpä *vasen* $\Rightarrow$ *oikea* on pätevä riippumatta siitä, mitä *oikea* tuottaa [28].

50. $a \leq b \;\Leftrightarrow\; \neg(b < a)$ [61]

51. $a \neq b \;\Leftrightarrow\; a < b \vee b < a$ [61]

52. $a < b \;\Leftrightarrow\; a < (b-a)+a \;\Leftrightarrow\; 0 < b-a \;\Leftrightarrow\; a+c < (b-a)+(a+c) \;\Leftrightarrow\; a+c < b+c$ [19,47]

53. Ei voi olla $1 = 0$, koska luvattiin $1 \neq 0$. Kohta osoitamme johtamalla ristiriidan, että ei voi olla $1 < 0$. Jäljelle jää vain mahdollisuus $0 < 1$ [61].

    Jos $1 < 0$, niin vähentämällä molemmilta puolilta 1 saadaan $0 < -1$ [63,19]. Siitä seuraa $0 < (-1)\cdot(-1) = 1$ [64,19], joka on ristiriidassa lähtökohdan $1 < 0$ kanssa [61].

54. Laki [63], $a < 0$ ja $b < 0$ tuottavat $0 < -a$ ja $0 < -b$. Siksi $0 < (-a)(-b) = ab$ [64].

55. Jäljellä on vain tapaus, jossa $c < 0$. Silloin $\mathfrak{h} \neq 0$ ja $\mathfrak{h} < 0$ tuottavat T, $\mathfrak{h} > 0$ tuottaa F, ja $\mathfrak{f} < \mathfrak{g}$, $ac > bc$, $\mathfrak{f}\mathfrak{h} > \mathfrak{g}\mathfrak{h}$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ ja $\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{h}} > \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ tuottavat saman kuin $a < b$ [sivu **??**], [66]. Niinpä kumpikin puoli tuottaa saman kuin $a < b$.

56. Jos $a^2 \le b$ ei ole tosi, niin $\Leftrightarrow$:n kumpikaan puoli ei ole tosi [9]. Jos $a^2 \le b$ on tosi, niin myös $b \ge 0$ on tosi koska $a^2 \le b \Rightarrow b \ge 0$ [28]. Niinpä myös $b \ge 0 \wedge a^2 \le b$ on tosi [9]. Silloin $\Leftrightarrow$:n molemmat puolet ovat tosi. Niinpä annettu yhtäpitävyys on pätevä [1].

57. Tehtävässä annettiin $a^2 \le b \Rightarrow b \ge 0$. Päättelysäännöllä [30] saadaan $a^2 \le b \Rightarrow a^2 \le b$. Niistä [35] tuottaa $a^2 \le b \Rightarrow b \ge 0 \wedge a^2 \le b$. Toisaalta [34] tuottaa $b \ge 0 \wedge a^2 \le b \Rightarrow a^2 \le b$. Niistä [30] tuottaa $a^2 \le b \Leftrightarrow b \ge 0 \wedge a^2 \le b$.

58. Osoitamme kummankin suunnan erikseen, jolloin tulos seuraa päättelysäännöllä [30].

    Päättelysääntö [37] tuottaa $a = b = 0 \vee -\sqrt{b} \le a \le \sqrt{b} \Leftarrow -\sqrt{b} \le a \le \sqrt{b}$.

    Jos $a = b = 0$, niin $-\sqrt{b} \le a \le \sqrt{b}$ on tosi, joten $a = b = 0 \Rightarrow -\sqrt{b} \le a \le \sqrt{b}$. Tehtävästä 30 seuraa $-\sqrt{b} \le a \le \sqrt{b} \Rightarrow -\sqrt{b} \le a \le \sqrt{b}$. Niinpä [38] tuottaa $a = b = 0 \vee -\sqrt{b} \le a \le \sqrt{b} \Rightarrow -\sqrt{b} \le a \le \sqrt{b}$.

59. Valitsemalla n:ksi n, m:ksi 0 ja k:ksi n [71] tuottaa $0 \le n$. Siitä [65] tuottaa $n = 0 \vee n > 0$.

60. Se pätee ilman vaatimistakin, koska $n \in \mathbb{N}$ tuottaa $n \ge 0$, joten vaatimus $n < d$ takaa $d > 0$.

61. Ei, sillä $\mid$ tuottaa totuusarvon, joten $+$ ei voi kohdistua sen tulokseen, joten $(d \mid n) + m$ olisi järjetön ilmaus.

62. Jos $h > \gcd(n,m)$, niin $h \nmid n$ tai $h \nmid m$, joten $\frac{n}{h}$ tai $\frac{m}{h}$ ei mene tasan.

63. Jos algoritmi lopettaa rivillä 5, niin $g = m_5 = m_4 > 0$ rivin 3 vuoksi. Jos algoritmi lopettaa suorittaessaan rivin 3 ensimmäisen kerran, niin $g = n_3 = n_1$ ja $0 = m_3 = m_1$. Koska oletettiin että alussa $n > 0$ tai $m > 0$, on $n_1 > 0$, joten $g > 0$. Muussa tapauksessa algoritmi lopettaa rivillä 3 tultuaan sinne riviltä 7 rivin 2 kautta. Niinpä $g = n_3 = n_2 = n_7 = n_6 > 0$ rivin 5 vuoksi.

64.
```
unsigned E_gcd( unsigned n, unsigned m ){
  if( n == 0 ){ return m; }
  if( m == 0 ){ return n; }
  while( n != m ){
    if( n > m ){ n -= m; }else{ m -= n; }
  }
  return n;
}
```
    Ilmaus `n -= m;` tarkoittaa $n := n - m$.

65. Algoritmissa ei ole muita mahdollisesti määrittelemättömiä toimintoja kuin vähennyslaskut. Nekään eivät voi tuottaa määrittelemätöntä lopputulosta, koska molemmat on suojattu testillä, joka varmistaa, että pienemmästä ei vähennetä suurempaa. Siksi algoritmi ei tee määrittelemättömiä toimintoja.

66. Joko $n_6 = n_5 - m_5 \wedge m_6 = m_5$ tai $n_6 = n_5 \wedge m_6 = m_5 - n_5$. Millään muulla tavalla muuttujien arvot eivät muutu.

67. $n_6 + m_6 < n_4 + m_4$

68. Muuttujien arvot eivät muutu ennen riviä 4. Kun riville 4 tullaan riviltä 3, on $n_4 = n_2 > 0$ ja $m_4 = m_3 > 0$, koska muutoin algoritmi olisi lopettanut rivillä 2 tai rivillä 3. ??? $\neq 0$

69. Jos suoritetaan **then**-haara, on $n_6 = n_5 - m_5 > 0$, koska **if**-lauseen ehdon vuoksi $n_5 > m_5$; ja $m_6 = m_5 > 0$, koska oletuksen vuoksi $m_5 > 0$. Muussa tapauksessa suoritetaan **else**-haara. Silloin $n_6 = n_5 > 0$, koska oletuksen vuoksi $n_5 > 0$; ja $m_6 = m_5 - n_5 > 0$, koska **if**-lauseen ehdon vuoksi $n_5 \leq m_5$ ja **while**-lauseen ehdon vuoksi $n_5 \neq m_5$. Niinpä kaikissa tapauksissa $n_6 > 0$ ja $m_6 > 0$.

70. Jos algoritmi lopettaa rivillä 2 tai 3, niin se lopettaa.

    Muussa tapauksessa sen lopettaminen määräytyy rivien $4, \ldots, 6$ silmukasta. Vastauksessa 68 osoitimme, että kun riville 4 tullaan riviltä 3, pätee $n_4 > 0$ ja $m_4 > 0$. Ainoa muu tapa tulla riville 4 on siirtyä riviltä 4 riville 5, suorittaa silmukan runko ja palata riville 4. Vastauksen 69 mukaan $n > 0 \wedge m > 0$ säilyy voimassa, kun suoritetaan silmukan runko. Se säilyy voimassa myös kun siirrytään riviltä 4 riville 5 tai riviltä 6 riville 4, koska silloin n:n ja m:n arvot eivät muutu. Siksi aina $n_4 > 0$ ja $m_4 > 0$.

    Jos suoritetaan **then**-haara, niin $n_6 = n_4 - m_4$ ja $m_6 = m_4$, joten $n_6 + m_6 = n_4 < n_4 + m_4$. Muussa tapauksessa suoritetaan **else**-haara, joten $n_6 = n_4$ ja $m_6 = m_4 - n_4$, josta seuraa $n_6 + m_6 = m_4 < n_4 + m_4$.

    Niinpä $n + m$ pienenee silmukan jokaisella kierroksella. Se ei kuitenkaan voi pienentyä alle nollan, koska n ja m ovat luonnollisia lukuja. Siksi silmukka, ja samalla koko algoritmi, lopettaa viimeistään $n_1 + m_1$ kierroksen jälkeen.

71. Osoitamme, että jos $d \mid n_1$ ja $d \mid m_1$, niin d on jokaisen arvon tekijä, joka esiintyy algoritmin suorituksen aikana n:ssä tai m:ssä. Niin ollen d on myös missä tahansa algoritmin **return**-lauseessa palautettavan arvon tekijä.

    Kun suoritetaan $n := n - m$, niin $(d \mid n) \wedge (d \mid m)$ säilyy voimassa, koska vastauksen 65 mukaan $n \geq m$, joten lain [86] vuoksi $d \mid (n - m)$. Samanlainen päättely pätee lauseelle $m := m - n$. Muiden lauseiden suorituksen aikana $(d \mid n) \wedge (d \mid m)$ säilyy voimassa, koska ne eivät muuta n:n eivätkä m:n arvoa.

72. Tarkastelemme ensin lopettamista rivillä 2. Silloin $n = 0$, joten palautettu arvo on n:n tekijä, koska jokainen luonnollinen luku on 0:n tekijä [83]. Palautettu arvo on myös m:n tekijä, koska se on m [82]. Rivi 3 on samanlainen n:n ja m:n roolit vaihdettuina. Jos algoritmi lopettaa rivillä 7, niin palautettu arvo on n:n ja m:n tekijä, koska se on n ja koska **while**-silmukan ehdon vuoksi $n = m$.

73. Edellisessä vastauksessa osoitimme, että lopputulos g on n:n ja m:n tekijä algoritmin lopettaessa. Osoitamme niille lauseille, joissa n:n tai m:n arvo muuttuu, että jos g on n:n ja m:n tekijä heti lauseen suorituksen jälkeen, niin se oli sitä myös juuri ennen lauseen suoritusta. Niinpä siitä, että algoritmin lopussa $g \mid n$ ja $g \mid m$ seuraa, että koko suorituksen ajan, ja siis myös algoritmin alussa, $g \mid n$ ja $g \mid m$.

    Jos **then**-haaran lopussa $g \mid n$ ja $g \mid m$, niin **then**-haaran alussa $g \mid (n - m)$ ja $g \mid m$, koska **then**-haarassa sijoitetaan $n := n - m$ eikä tehdä muuta. Lain [85] vuoksi $g \mid ((n - m) + m)$ eli $g \mid n$, joten **then**-haaran alussa $g \mid n$ ja $g \mid m$. Samalla tavalla voidaan osoittaa, että jos **else**-haaran lopussa $g \mid n$ ja $g \mid m$, niin myös **else**-haaran alussa $g \mid n$ ja $g \mid m$. Muuttujan n arvo ei muutu muualla kuin **then**-haarassa ja m:n arvo ei muutu muualla kuin **else**-haarassa.

74. Todistus menee kuten `gcd`-algoritmin tapauksessa. Olkoot $n = n_1$ ja $m = m_1$. Nytkin on helppo nähdä, että jos $n = m = 0$, niin algoritmi palauttaa 0 kuten pitääkin. Muussa tapauksessa $n > 0$ tai $m > 0$. Siksi $\gcd(n,m)$ on olemassa [89]. Koska lopputulos g on n:n ja m:n tekijä [sivu ??], ja koska ainakin toinen n:stä ja m:stä on suurempi kuin 0, pätee $g > 0$ [84]. Koska jokainen n:n ja m:n yhteinen tekijä on myös g:n tekijä [sivu ??], pätee $\gcd(n,m) \mid g$. Koska $g > 0$, tuottaa [84] $\gcd(n,m) \leq g$. Koska g on n:n ja m:n yhteinen tekijä [sivu ??], pätee $g \leq \gcd(n,m)$. Niinpä $g = \gcd(n,m)$.

75. $\mathit{serkku}(x,y) \;\Leftrightarrow\; x \neq y \wedge \exists a : \exists b : \mathit{sisarus}(a,b) \wedge x \hookleftarrow a \wedge y \hookleftarrow b$

76. Jos $1 \leq x < y$, niin $y > 1 > 0$. Siksi $y \neq 0$, joten $\frac{1}{y}$ on olemassa. Se on sellainen luku, että $\frac{1}{y}y = 1$.

77.

	$\neg\exists x : \varphi$	
$\equiv$	$\neg\exists x : \neg\neg\varphi$	kaksoiskiellon poisto takaperin [24,26]
$\equiv$	$\neg\neg\forall x : \neg\varphi$	annettu De Morganin laki takaperin [24,26]
$\equiv$	$\forall x : \neg\varphi$	kaksoiskiellon poisto

78. Koska $0 = 0$ tuottaa T, myös $\exists x : x = 0$ tuottaa T. Niinpä tehtävän ensimmäisen päättelyimplikaation oikea puoli tuottaa aina T, joten päättelyimplikaatio on pätevä [28]. (Yhtä hyvin kelpaa, että koska $1 = 0$ tuottaa F, myös $\forall x : x = 0$ tuottaa F, joten $\forall x : x = 0 \Rightarrow \exists x : x = 0$ on pätevä.) Koska $\frac{1}{1} = 0$ tuottaa F, myös $\forall x : \frac{1}{x} = 0$ tuottaa F. Niinpä tehtävän toisen päättelyimplikaation vasen puoli ei koskaan tuota T, joten päättelyimplikaatio on pätevä [28].

79. Kaava $\forall x\,; \frac{1}{x} = 0 : x = 0$ tarkoittaa samaa kuin $\forall x : \frac{1}{x} = 0 \rightarrow x = 0$. Kun $x = 0$, kaava $\frac{1}{x} = 0 \rightarrow x = 0$ tuottaa T. Kun $x \neq 0$, kaava $\frac{1}{x} = 0$ tuottaa F, joten $\frac{1}{x} = 0 \rightarrow x = 0$ tuottaa T. Niinpä $\forall x\,; \frac{1}{x} = 0 : x = 0$ tuottaa aina T. Kaava $\exists x\,; \frac{1}{x} = 0 : x = 0$ tarkoittaa samaa kuin $\exists x : \frac{1}{x} = 0 \wedge x = 0$. Kun $x \neq 0$, kaava $\frac{1}{x} = 0 \wedge x = 0$ tuottaa F. Kun $x = 0$, kaava $\frac{1}{x} = 0$ tuottaa U, joten $\frac{1}{x} = 0 \wedge x = 0$ tuottaa U. Niinpä $\exists x\,; \frac{1}{x} = 0 : x = 0$ tuottaa aina U. Koska kaavavertailun vasen puoli tuottaa aina T ja oikea puoli tuottaa aina U, ei kaavavertailu ole pätevä.

80. Jos jollakin x:n arvolla sekä $\chi(x)$ että $\varphi(x)$ tuottaa T, niin $\exists x\,; \chi(x) : \varphi(x)$ tuottaa T, joten kaavavertailu on pätevä. Jos jollakin x:n arvolla $\chi(x)$ tuottaa T ja $\varphi(x)$ ei tuota T, niin sillä x:n arvolla $\chi(x) \rightarrow \varphi(x)$ ei tuota T. Niinpä $\forall x\,; \chi(x) : \varphi(x)$ ei tuota T, joten kaavavertailu on pätevä. Samoin käy jos jollakin x:n arvolla $\chi(x)$ tuottaa U ja $\varphi(x)$ ei tuota T.

    Jäljellä on tapaukset, joissa kullakin x:n arvolla joko $\chi(x)$ tuottaa F, tai $\chi(x)$ tuottaa U ja $\varphi(x)$ tuottaa T. Niissä jokaisella x:n arvolla $\chi(x) \rightarrow \varphi(x)$ tuottaa T, joten $\forall x\,; \chi(x) : \varphi(x)$ tuottaa T. Toisaalta millään x:n arvolla ei $\chi(x)$ tuota T, joten $\exists x\,; \chi(x) : \varphi(x)$ ei tuota T. Niinpä kaavavertailu ei päde.