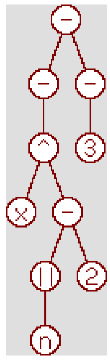
TIEP1020 Diskreetit rakenteet Antti Valmari Tentti 24.4.2024 sivu 1

Nimesi: ______________________________ Syntymäaikasi: ______________

Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Maksimipistemärä on 30. Kukin kohta on 1 tai 2 pisteen arvoinen. Vastaukselta ei vaadita enempää kuin mihin vastaustila riittää.

1&2. Oikealla ja siitä alaspäin on tyhjää tilaa.
Piirrä siihen lausekkeen $-x^{|n|-2} - -3$ lausekepuu.



Tarkoittakoon L että Suomi voittaa loppuottelun, P että Suomi voittaa pronssiottelun, ja M että Suomi saa mitalin. Ilmaise kaavoina

3. Suomi ei voita molempia otteluita. $\neg(L \wedge P)$ ________
4. Suomi saa mitalin jos ja vain jos Suomi voittaa jommankumman ottelun. $M \leftrightarrow L \vee P$ ________

Jäljellä on enää neljä joukkuetta A, B, C ja D, ja kaksi ottelua: loppuottelu jonka pelaavat A ja B, sekä pronssiottelu jonka pelaavat C ja D. Kummassakin ottelussa toinen joukkueista voittaa ja toinen häviää. Loppuottelun häviäjä ja vain se saa hopeaa.

5. Mille joukkueille on totta, että jos se voittaa loppuottelun, niin se saa hopeaa? C ja D ___
6. Perustele edellisen tehtävän vastauksesi jokaiselle joukkueista A, B, C ja D.
   Jos A tai B voittaa loppuottelun, niin se ei häviä sitä, joten se ei saa hopeaa.________
   C ja D eivät voi voittaa loppuottelua, koska ne eivät pelaa siinä. ________

Kohdissa 7 ja 8 sievennä $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg P)$ olettaen, että

7. $P \Leftrightarrow \mathbf{F}$. $(\mathbf{F} \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg\mathbf{F}) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{T} \wedge \mathbf{T} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{T}$ ________
8. $P \Leftrightarrow \mathbf{T}$. $(\mathbf{T} \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg\mathbf{T}) \;\Leftrightarrow\; Q \wedge \neg Q \;\Leftrightarrow\; \mathbf{F}$ ________
9. Sievennä $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg P)$. $\neg P$ ________
10. Paina negaatiot alas ja sievennä $\neg(P \wedge \neg Q \vee \neg R)$. $\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg\neg R \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge R$ ___
11. Sievennä $\neg(-3 \leq x < 2) \vee x > 1$. $x < -3 \vee x > 1$ ________

Kohdissa 12…14 täydennä kaava, joka tarkoittaa samaa kuin $2|x+2| + |x-1| = 9$ ja jossa ei ole itseisarvomerkkejä. Kaavan pitää olla se joka saadaan kuten kurssilla on neuvottu.

12. ________ $(x < -2 \;\wedge\; -2(x+2) - (x-1) = 9)$
13. $\vee$ ________ $(-2 \leq x < 1 \;\wedge\; 2(x+2) - (x-1) = 9)$
14. $\vee$ ________ $(1 \leq x \;\wedge\; 2(x+2) + (x-1) = 9)$
15. Ratkaise $2|x+2| + |x-1| = 9$. ________ $x = -4 \vee x = 2$
16. Mikä kohdista 12…14 ei tuottanut juurta yhtälölle $2|x+2| + |x-1| = 9$, ja miksi ei?
    ________ Keskimmäisen juuri olisi 4, mutta se ei toteuta $-2 \leq x < 1$.

käännä

Tarkastellaan kielioppia $K ::= \varepsilon \mid aKc \mid bKc$.

17&18. Anna esimerkki kieleen K kuuluvasta merkkijonosta jonka pituus on 6, tai perustele, että sellaista merkkijonoa ei ole olemassa. Tee sama pituuksille 5, 4, 3, 2, 1 ja 0.

Paritonta pituutta ei voi saavuttaa, koska ε tuottaa nolla ja

aKc ja bKc tuottavat kaksi merkkiä. Parilliset: $aaaccc$ $aacc$ ac ε

19. Anna esimerkki kieleen K kuuluvasta merkkijonosta, jossa on vähemmän merkkejä a kuin merkkejä c, tai perustele, että sellaista merkkijonoa ei ole olemassa.

bc

20. Anna esimerkki kieleen K kuuluvasta merkkijonosta, jossa on enemmän merkkejä a kuin merkkejä c, tai perustele, että sellaista merkkijonoa ei ole olemassa.

Ei ole olemassa, koska aKc on ainoa keino tuottaa a, ja se tuottaa myös c:n.

21. Aakkosto on $\{a, b, c\}$. Kirjoita BNF-määritelmä kielelle X, joka sisältää ne ja vain ne merkkijonot, joiden ensimmäinen ja viimeinen merkki ovat a, ja mikään muu merkki ei ole a. Lyhimmän tähän kieleen kuuluvan merkkijonon pituus on 1.

$X ::= a \mid aYa$ $\qquad$ $Y ::= \varepsilon \mid bY \mid cY$

Kirjoita seuraavat taulukosta $A[1 \dots n]$ puhuvat väitteet kaavoina.

22. Taulukon kaikki alkiot ovat nelosia. $\forall i; 1 \leq i \leq n : A[i] = 4$

23. Taulukossa on ainakin kaksi nelosta. $\exists i : \exists j; 1 \leq i < j \leq n : A[i] = A[j] = 4$

24. Taulukon kohdassa i on nelonen ja muualla ei ole.

$1 \leq i \leq n \wedge A[i] = 4 \wedge \forall j; 1 \leq j \leq n \wedge i \neq j : A[j] \neq 4$

25. Taulukossa on neljä alkiota. $n = 4$

Seuraavissa tehtävissä kaikki muuttujat saavat arvonsa kokonaisluvuista. Kokonaisluku n on *jaollinen* kokonaisluvulla m, missä $m \neq 0$, jos ja vain jos on olemassa sellainen kokonaisluku k, että $n = km$. *Alkuluku* tarkoittaa ykköstä suurempaa kokonaislukua, joka ei ole jaollinen muilla positiivisilla kokonaisluvuilla kuin ykkösellä ja itsellään.

26. Millä kokonaisluvuilla 15 on jaollinen? -15, -5, -3, -1, 1, 3, 5 ja 15

27. Millä kokonaisluvuilla 0 on jaollinen? Jokaisella muulla kuin 0 [koska $0 = 0m$].

28. Kirjoita kaava, joka sanoo että p on alkuluku.

$p > 1 \wedge \neg\exists k : \exists m : k > 1 \wedge m > 1 \wedge p = km$

29&30. Kirjoita yksinkertainen ohjelmanpätkä, joka palauttaa `true` jos ja vain jos kokonaisluku p on alkuluku. Muutoin se palauttaa `false`. Sen ei tarvitse olla tehokas.

if $p < 2$ **then return** `false`
for $i := 2$ to $p - 1$ **do**
    if p mod $i = 0$ **then return** `false`
return `true`

loppu