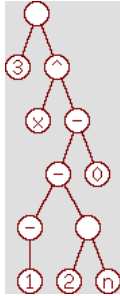


Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Vastaa tentin järjestäjän antamalle paperille. Jokainen tehtävä on 6 pisteen arvoinen. Pisteet jakautuvat tasan alakohtiin (a), (b) jne., ellei toisin sanota.

1. (a) Piirrä lausekkeen  $3x^{-1-2n-0}$  lausekepuu.



- (b) Kuinka paljon on  $1316^{3632} \bmod 13$ ? Näytä ainakin kaksi järkevää välivaihetta.  
 Koska  $1316 \bmod 13 = 3$  ja  $3^3 \bmod 13 = 27 \bmod 13 = 1$  ja  $3632 \bmod 3 = 2$ , pätee  $1316^{3632} \bmod 13 = 3^{3632} \bmod 13 = 3^2 \bmod 13 = 9$ .

- (c) Perustelee  $\frac{9}{|2-x|+3} > 2 \Leftrightarrow 9 > 2(|2-x|+3)$ .  
 Itseisarvo on aina vähintään nolla, joten  $|2-x|+3 > 0$ . Siksi  $|2-x|+3 \neq 0$ , joten ei tule nolllalla jakoa. Epäyhtälön merkki säilyttää suuntansa kun molemmat puolet kerrotaan positiivisella luvulla.

2. Tarkoittakoon  $L$  että logiikka on kivaa,  $M$  että matematiikka on kivaa ja  $O$  että ohjelmointi on kivaa. Ilmaise seuraavat logiikan merkinnöillä.

- (a) Ohjelmointi on kivaa, mutta matematiikka ja logiikka eivät ole.  
 $O \wedge \neg M \wedge \neg L$
- (b) Matematiikka tai ohjelmointi on kivaa jos ja vain jos logiikka on kivaa.  
 $(M \vee O) \leftrightarrow L$

Sievennä seuraavat. Näytä kummallekin ainakin yksi järkevä välivaihe tai muu perustelu.

- (c)  $P \wedge (Q \vee R) \vee \neg Q$       (d)  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$   
 (c)  $\Leftrightarrow P \vee \neg Q$ , koska jos  $Q \Leftrightarrow \mathbf{F}$  niin molemmat ovat  $\mathbf{T}$ , ja jos  $Q \Leftrightarrow \mathbf{T}$  niin molemmat ovat  $P$ .  
 (d)  $\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee P \Leftrightarrow \mathbf{T}$

Mitkä seuraavista päättelyaskelista ovat päteviä? Perustelee vastauksesi.

- (e)  $x < -2 \Rightarrow |x| \geq 1$       (f)  $x = 0 \wedge x = 1 \Rightarrow x = 2$   
 (e) On pätevä. Jos  $x < -2$ , niin  $|x| = -x > 2$ , jolloin  $|x| \geq 1$ .  
 (f) On pätevä. Koskaan ei päde  $x = 0 \wedge x = 1$ , ja mahdottomasta seuraa mitä tahansa.

3. (a) Olkoot  $\sigma$  ja  $\rho$  merkkijonoja, ja  $|\sigma|$  on  $\sigma$ :n pituus. Kuinka paljon on  $|\epsilon|$ ? Kuinka paljon on  $|\sigma\rho|$ ?

0  
 $|\sigma| + |\rho|$

- (b) Perustelee tai anna vastaesimerkki sille, että aina  $\sigma\rho = \rho\sigma$ , ja sille, että aina  $\sigma\epsilon = \epsilon\sigma$ .  
 Jos  $\sigma = a$  ja  $\rho = b$ , niin  $\sigma\rho = ab \neq ba = \rho\sigma$ . Toisaalta  $\sigma\epsilon = \sigma = \epsilon\sigma$ .
- (c) Olkoot  $X ::= AB$   $A ::= ka \mid kana$   $B ::= \epsilon \mid la \mid na$  Luettele  $X$ :n tuottamat merkkijonot. Kuinka monta erilaista niitä on?  
 $ka, kala, kana, kanala, kanana$  viisi

- (d) Olkoon  $Y ::= a \mid bYc$ . Luettele  $Y$ :n tuottamat merkkijonot. Kuinka monta erilaista niitä on?

$a, bac, bbacc, bbbacc, \dots$  äärettömästi

- (ef) Luonnollisia lukuja ovat  $0, 1, 2, \dots$ . Turha etunolla on luvun alussa oleva 0, paitsi jos se on luvun ainoa merkki. Esimerkiksi 0 ja 30 eivät sisällä turhia etunollia, mutta 00 ja 030 sisältävät. Kirjoita BNF-määritelmä luonnollisille luvuille ilman turhia etunollia.

$L ::= 0 \mid M$

$M ::= N \mid M0 \mid MN$

$N ::= 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

4. Taulukko  $T[1 \dots n]$  indeksoidaan 1:stä  $n$ :ään.

- (a) Esitä kaavana: Jossakin kohdassa  $T$ :tä on kolmonen.

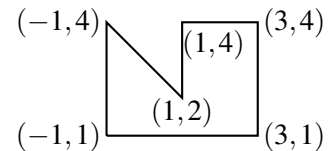
$\exists i; 1 \leq i \leq n : T[i] = 3$

- (b) Esitä kaavana: Täsmälleen yhdessä kohdassa  $T$ :tä on kolmonen.

$\exists i; 1 \leq i \leq n : T[i] = 3 \wedge \forall j; 1 \leq j \leq n : i = j \vee T[j] \neq 3$

- (c) Kirjoita kaava, jonka toteuttavat täsmälleen ne  $x$  ja  $y$ , joille piste  $(x, y)$  on kuvassa olevan viivan sisäpuolella. Kuvassa on annettu kärkipisteet muodossa  $(x, y)$ . Niitten väliset osuudet ovat suoria. Jos on liian vaikea, niin oikaise  $(-1, 4)$ :stä suoraan  $(1, 4)$ :ään (eikä  $(1, 2)$ :n kautta).

$-1 < x < 3 \wedge 1 < y < 4 \wedge (x + y < 3 \vee x > 1)$



5. Oletetaan, että taulukko  $T[1 \dots n]$  on kasvavassa suuruusjärjestyksessä ja  $x$  on siinä jossain kohdassa. Oheisen algoritmin pitäisi löytää  $x$ :n paikka  $T$ :ssä, mutta siinä on virhe. Missä muuttujassa vastaus on? Mikä virhe algoritmissa on ja mitä pahaa se saa aikaan? Ehdota virheelle korjaus ja perustelee korjauksesi. Merkintä  $\lfloor x \rfloor$  tarkoittaa  $x$  pyöristettynä alas lähimpään kokonaislukuun. Vihje: virheen saa ilmeneväseen kahden alkion taulukolla.

$a := 1; y := n + 1$

**while**  $a < y$  **do**

$v := \lfloor \frac{a+y}{2} \rfloor$

**if**  $T[v] < x$  **then**  $a := v$

**else**  $y := v$

Vastaus on muuttujassa  $y$ . (Jos ohjelma lopettaa, niin sama vastaus on myös  $a$ :ssa.) Kun  $T[v] < x$ , niin pitäisi sijoittaa  $a := v + 1$ . Koska niin ei tehdä, algoritmi voi jäädä ikuisen silmukkaan. Korjatussa algoritmissa oikea kohta on aina välillä  $a, \dots, y$ , ja väli pienenee joka kierroksella kunnes  $a = y$ .

loppu