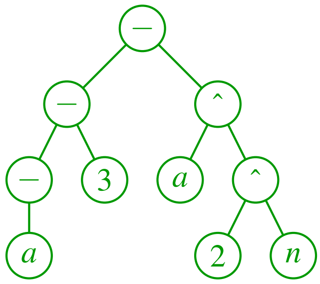
Nimesi: ______________________________ Syntymäaikasi: ____________

Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Maksimipistemäärä on 30. Kukin tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen. Vastaukselta ei vaadita enempää kuin mihin vastaustila riittää.

1. 2. Piirrä tyhjään tilaan lausekkeen $-a-3-a^{2^n}$ lausekepuu.



3. Sievennä $\mathsf{F} \vee (\neg\mathsf{F} \wedge Q)$. Q

4. Sievennä $P \vee (\neg P \wedge Q)$, kun $P \Leftrightarrow \mathsf{T}$. T

5. Perustele $P \vee (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow P \vee Q$ tai anna sille vastaesimerkki.
Kun $P \Leftrightarrow \mathsf{F}$, tulee molemmilta puolilta Q.
Kun $P \Leftrightarrow \mathsf{T}$, tulee molemmilta puolilta T.

6. Perustele $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \vee \neg Q$ tai anna sille vastaesimerkki.
Jos $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow \mathsf{T}$, niin $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg\mathsf{T} \Leftrightarrow \mathsf{F}$ mutta $P \vee \neg Q \Leftrightarrow \mathsf{T} \vee \neg\mathsf{T} \Leftrightarrow \mathsf{T}$.

7. Sievennä $\neg(2 < x \leq 5) \wedge x < 3$. $x \leq 2$

8. 9. Ratkaise $\dfrac{|x-1|+x}{x+2} \geq 1$.
$\Leftrightarrow x < -2 \wedge |x-1|+x \leq x+2 \vee x > -2 \wedge |x-1|+x \geq x+2$
$\Leftrightarrow x < -2 \wedge 1 \leq x+2 \vee -2 < x < 1 \wedge 1 \geq x+2 \vee 1 \leq x \wedge 2x-1 \geq x+2$
$\Leftrightarrow -2 < x \leq -1 \vee x \geq 3$

Kahvipaketin hinta on 5,00 € ja se nousee kaksi senttiä päivässä. Opiskelijalla on rahaa 3,20 € ja hän säästää lisää viisi senttiä päivässä. Nykyhetki on $t = 0$ ja t:n yksikkö on päivä.

10. Kirjoita lauseke, joka esittää kahvipaketin hinnan statteinä ajan funktiona. $500+2t$

11. Kirjoita yhtälö, joka kertoo milloin opiskelijan rahat juuri ja juuri riittävät kahvipakettiin. $500+2t = 320+5t$

12. Kuinka monen päivän päästä opiskelija pystyy ostamaan kahvipaketin? 60

13. Paljonko on $(7^{2023}) \bmod 5$? Perustele. Koska $7 \bmod 5 = 2$, $(2 \cdot 7) \bmod 5 = 4$, $(4 \cdot 7) \bmod 5 = 3$ ja $(3 \cdot 7) \bmod 5 = 1$, pätee $7^{2023} \bmod 5 = 7^{4 \cdot 505 + 3} \bmod 5 = 1^{505} \cdot 3 = 3$.

14. Luettele kaikki kieleen $X ::= YZ \mid aY \quad Y ::= \varepsilon \mid Yb \quad Z ::= cc$ kuuluvat merkkijonot, joiden pituus on enintään 4. $cc, bcc, bbcc, a, ab, abb, abbb$

Käännä!

Kirjoita BNF-määritelmät seuraaville kielille. Muuttujat n ja m saavat arvonsa luonnollisista luvuista $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Saat olettaa (b)-kohdassa että (a)-kohdan kieli A on jo määritelty, ja (c)-kohdassa että A ja B on jo määritelty.

15. $A = \{a^n b^n \mid \} = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \ldots\}$ eli ne merkkijonot, joissa on ensin jokin määrä a:ta ja sen jälkeen sama määrä b:tä. $A ::= \varepsilon \mid aAb$

16. $B = \{a^n b^m \mid n > m\}$ eli ne merkkijonot, joissa on ensin jokin määrä a:ta ja sen jälkeen vähemmän b:tä. $B ::= aA \mid aB$

17. $C = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$ eli ne merkkijonot, joissa on ensin jokin määrä a:ta ja sen jälkeen eri määrä b:tä. $C ::= B \mid D \quad D ::= Ab \mid Db$

Taulukko H indeksoidaan $a, \ldots, y$. Kirjoita seuraavat predikaatit.

18. H:ssa on ainakin yksi kakkonen. $\exists i; a \leq i \leq y : H[i] = 2$

19. H:ssa on ainakin kaksi alkiota. $y > a$

20. H:ssa on ainakin kaksi erisuurta alkiota. $\exists i : \exists j; a \leq i < j \leq y : H[i] \neq H[j]$

21. 22. H:ssa on täsmälleen yksi kakkonen, ja se on kohdassa i.
$a \leq i \leq y \wedge H[i] = 2 \wedge \forall j; a \leq j \leq y : i = j \vee H[j] \neq 2$

Oletetaan, että $n \in \mathbb{N}$ ja $m \in \mathbb{N}$. Tarkastellaan oheista ohjelmaa.

```
1  r := n
2  q := 0
3  while r ≥ m do
4      r := r − m
5      q := q + 1
```

23. Valitse muuttujille sellaiset alkuperäiset arvot (eli arvot rivin 1 alussa), että ohjelma suorittaa testin $r \geq m$ tasan kolme kertaa, ja ohjelman lopetettua $r = 2$. Ilmoita muuttujien arvot rivin 3 alussa.

	n	m	q	r
eka kerta	8	3	0	8
toka kerta	8	3	1	5
kolmas kerta	8	3	2	2

24. Täydennä kaava, joka pätee aina rivin 3 alussa. Vastausviivalle tuleva ei saa sisältää n:ää (mutta saa sisältää m, q ja/tai r). $n = qm + r$

25. Perustele, että kaava pätee aina rivin 3 alussa. Eka kerralla se pätee, koska $r = n$ ja $q = 0$.
Rivin 4 lopussa $n = qm + r + m$ ja rivin 5 lopussa jälleen $n = qm + r$.

26. Anna välttämätön ja riittävä muuttujien arvoja rivin 1 alussa koskeva ehto sille, että ohjelma pysähtyy eli lopettaa. $m > 0$

27. Perustele, että jos ehto pätee niin ohjelma lopettaa. Jos $m > 0$, niin r pienenee joka kierroksella, kunnes lopulta $r < m$, jolloin ohjelma lopettaa.

28. Perustele, että muutoin ohjelma ei lopeta. Muutoin $m = 0$ (koska $m \in \mathbb{N}$), joten r ja m eivät muutu. Lisäksi $r = n \geq 0$, joten ehto $r \geq m$ ei koskaan rikkoudu.

29. Millä välillä r on ohjelman lopetettua? $0 \leq r < m$

30. Minkä tutun asian ohjelma laskee? $q = n \operatorname{div} m$ ja $r = n \bmod m$

loppu