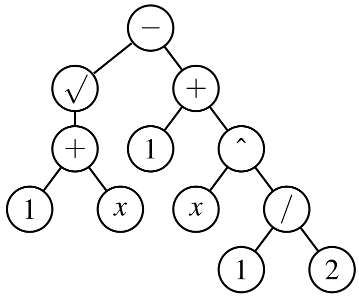
Kuhunkin kohtaan vastataan siihen TIMissä olevaan laatikkoon, jolla on sama nimi kuin kohdan edessä. **Avustajien käyttö on ankarasti kielletty.** Kurssin aineistoa, muita lähteitä (myös netistä löytyviä) ja ohjelmia saa käyttää. Laskelmiesi tarkastamiseen kannattaa käyttää sivua `http://users.jyu.fi/%7eava/MathCheck_yleinen.html` Monet tästä PDF-tiedostosta maalaamalla kopioidut kaavat voi pudottaa sinne ja ne kelpaavat syntaksin puolesta sellaisinaan tai pienin muutoksin. Kunkin kohdan maksimipistemäärä on 1. Tentin maksimipistemäärä on 26, johon lisätään aiemmin palautetun esseen pisteet 0, ..., 4, joten kaikkiaan maksimi on 30. Jos tekniikka ei toimi, meilaa `antti.valmari@jyu.fi`

P1 Kirjoita MathCheckin syntaksilla lauseke, joka tuottaa kuvan mukaisen lausekepuun. Käytä mahdollisimman vähän sulkuja. Kuitenkin, jos olet epävarma, niin käytä sulkuja silläkin uhalla että ne ovat turhat, sillä turhista suluista sakotetaan vähemmän kuin väärästä puusta.
`sqrt(1+x) - (1+x^(1/2))`



P2 Valitse lausekkeestasi mikä tahansa osalauseke, jonka ympärille tarvittiin sulut, mutta joka normaalissa matemaattisessa esitystavassa ei tarvitse sulkuja. Kerro, miksi sulut eivät ole tarpeelliset normaalissa matemaattisessa esitystavassa.
`1+x` Normaalissa matemaattisessa esitystavassa neliöjuuren päällä oleva vaakaviiva osoittaa, että juuren alla on `1+x` mutta ei enempää. TAI `1/2` Normaalissa ... eksponentti on yläindeksissä, joten sen loppukohta erottuu ilman sulkujakin.

Oletetaan, että J tarkoittaa että Rölli pitää jäätelöstä, S tarkoittaa että Rölli pitää suklaasta ja P tarkoittaa, että Rölli on peikko. Esitä seuraavat väitteet MathCheckin propositiologiikkasyntaksilla.

L1 Rölli pitää suklaasta mutta ei pidä jäätelöstä.
$S \land \neg J$

L2 Jos Rölli ei pidä jäätelöstä, niin hän on peikko.
$\neg J \rightarrow P$

Sievennä seuraavat kaavat mahdollisimman lyhyeen muotoon. Kirjoita kuhunkin vastaukseen ainakin yksi välivaihe tai muu perustelu sille, että sievennys on oikein. (Tässä tehtävässä totuusarvoja ovat **F** ja **T**. Toisin sanoen, totuusarvo **U** ei ole käytössä.)

S1 $P \lor (\neg P \land Q)$
$\Leftrightarrow (P \lor \neg P) \land (P \lor Q) \Leftrightarrow P \lor Q$

S2 $(Q \rightarrow P) \rightarrow P$
$\Leftrightarrow \neg(\neg Q \lor P) \lor P \Leftrightarrow (Q \land \neg P) \lor P \Leftrightarrow P \lor Q$

S3 $P \leftrightarrow P \land Q$
$\Leftrightarrow (P \rightarrow P \land Q) \land (P \land Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \land \mathsf{T} \Leftrightarrow P \rightarrow Q$

Ovatko seuraavat päättelyaskelet päteviä? Vastaa kullekin ”K” (eli ”kyllä”) tai ”E” (eli ”ei”). Jos vastaat ”K”, niin kirjoita lisäksi lyhyt perustelu, esim. ”de Morganin laki”. Jos vastaat ”E”, niin kirjoita esimerkki, jossa päättelyaskel on väärin. Merkinnät $f(x)$ ja $g(x)$ tarkoittavat mitä tahansa vakioista, muuttujasta x ja/tai tutuista laskutoimituksista koottuja reaalilukujen lausekkeita, ja c on mikä tahansa reaaliluku.

X1 $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; cf(x) = cg(x)$
E. Jos $c = 0$, $f(x) = x$ ja $g(x) = x+1$, niin $f(x) = g(x)$ ei päde mutta $cf(x) = cg(x)$ pätee.

X2 $\neg(f(x) < g(x)) \;\Rightarrow\; f(x) > g(x)$
E. Jos $f(x) = g(x) = 0$, niin $\neg(f(x) < g(x))$ pätee mutta $f(x) > g(x)$ ei päde.

X3 $|f(x)| = g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) = g(x) \vee -f(x) = g(x)$
E. Jos $f(x) = g(x) = -1$, niin $|f(x)| = g(x)$ ei päde mutta $f(x) = g(x) \vee -f(x) = g(x)$ pätee.

X4 $f(x) > g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \geq g(x)+1$
E. Jos $f(x) = 1/2$ ja $g(x) = 0$, niin $f(x) > g(x)$ pätee mutta $f(x) \geq g(x)+1$ ei päde.

X5 $\neg(f(x) \leq g(x)) \;\Rightarrow\; f(x) \geq g(x)$
K. $\neg(f(x) \leq g(x))$ tarkoittaa samaa kuin $f(x) > g(x)$, josta $f(x) \geq g(x)$ seuraa.

$S ::= \varepsilon \mid ST \quad T ::= ab \mid aTb$

C1 Anna merkkijonon *aabbab* jäsennyspuu oheisen BNF-määritelmän mukaan. Koska puiden piirtäminen TIM-ikkunaan on hankalaa, esitä vastauksesi seuraavasti. Numeroi jäsennyspuun solmut siten, että juuri on ykkönen. Kullekin solmulle kirjoita rivi, jossa on ensin solmun numero, sitten solmun sisältö, ja lopuksi lapsisolmujen numerot, siis esimerkiksi 1 S 2 3.
1 S 2 3   2 S 4 5   3 T 6 7   4 S 8   5 T 9 10 11   6 a   7 b   8 eps   9 a   10 T 12 13   11 b   12 a   13 b

Mustaa autoa merkitään `m`, punaista `p` ja valkoista `v`. Muunvärisiä autoja ei ole. Esitä seuraavat kielet BNF:llä. Huomaa, että kohdissa B2 ja B3 jonossa saa olla myös mustia ja/tai valkoisia autoja. Jos haluat, niin selitä sanallisesti miksi kirjoitit sellaisen BNF-määritelmän kuin kirjoitit. Sanallinen selitys saattaa pelastaa osan pisteestä, jos BNF-määritelmäsi ei ole oikein.

B1 Jonossa on vain punaisia autoja, ja niitä on ainakin kolme kappaletta. Käytä kielen nimenä X.
$X ::= ppp \mid pX$

B2 Jonossa on ainakin yksi punainen auto. Käytä kielen nimenä Y.
$Y ::= p \mid AY \mid YA \quad A ::= m \mid p \mid v$

B3 Jonossa on ainakin yksi punainen auto, ja viimeisen punaisen auton jälkeen on vain valkoisia autoja. Käytä kielen nimenä Z.
$Z ::= p \mid Zv \mid mZ \mid vZ \mid pZ$

Esitä seuraavat väittämät taulukosta $A[1 \ldots n]$ puhuvina tilapredikaatteina. Ykkönen tarkoittaa lukua 1 ja kakkonen lukua 2. Jos haluat, niin selitä sanallisesti miksi kirjoitit sellaisen tilapredikaatin kuin kirjoitit. Sanallinen selitys saattaa pelastaa osan pisteestä, jos tilapredikaattisi ei ole oikein.

T1 Taulukossa on vain ykkösiä, ja niitä on ainakin kolme kappaletta.
$n \geq 3 \wedge \forall i; 1 \leq i \leq n : A[i] = 1$

T2 Taulukossa on ainakin yksi ykkönen.
$\exists i; 1 \leq i \leq n : A[i] = 1$

T3 Taulukossa on ainakin yksi ykkönen, ja viimeisen ykkösen jälkeen on vain kakkosia.
$\exists i; 1 \leq i \leq n : A[i] = 1 \wedge \forall j; i < j \leq n : A[j] = 2$

O1 Kirjoita pseudokoodilla tai jollakin ohjelmointikielellä ohjelmanpätkä, joka palauttaa `true` eli **T** jos tehtävän T3 väittämä pätee, ja `false` eli **F** jos se ei päde.

```
for( int i = n; i > 0; --i ){
  if( A[i] == 1 ){ return true; }
  if( A[i] != 2 ){ return false; }
}
return false;
```

Rölli on tarkka ruokavaliostaan. Hän syö vain pitsaa, josta 40 % on rasvaa ja 30 % hiilihydraatteja sekä jäätelöä, josta 20 % on rasvaa ja 60 % hiilihydraatteja. Merkitsemme Röllin syömän pitsan määrää grammoina p:llä ja jäätelön määrää grammoina j:llä.

Y1 Kirjoita lauseke, joka esittää Röllin syömän rasvan määrän p:n ja j:n funktiona.
$0.4p + 0.2j$

Y2 Kirjoita lauseke, joka esittää Röllin syömien hiilihydraattien määrän p:n ja j:n funktiona.
$0.3p + 0.6j$

Y3 Rölli haluaa syödä päivittäin tasan 450 g rasvaa ja tasan 630 g hiilihydraatteja. Kuinka paljon pitsaa ja jäätelöä hänen pitää päivittäin syödä? Kirjoita yhtälöpari ja ratkaise se.
$0.4p + 0.2j = 450 \wedge 0.3p + 0.6j = 630 \;\Leftrightarrow\; p = 800 \wedge j = 650$

Oleta, että $b > 0$ ja $c > 0$. Jokaiselle seuraavista luonnollisia lukuja koskevista väittämistä kerro, onko se totta, vastaamalla ”K” (eli kyllä) tai ”E” (ei). Jos se on totta, niin todista tai perustele se. Jos se ei ole totta, niin anna vastaesimerkki.

M1 $b(a \text{ div } b) \leq a < b(a \text{ div } b) + b$
K. Koska a div b on a/b pyöristettynä alaspäin, pätee $a \text{ div } b \leq a/b < a \text{ div } b + 1$. Väite seuraa kertomalla b:llä.

M2 $(a \bmod b) \bmod c = (a \bmod c) \bmod b$
E. $(5 \bmod 3) \bmod 2 = 0$ mutta $(5 \bmod 2) \bmod 3 = 1$

M3 $(a \text{ div } b) \text{ div } c = (a \text{ div } c) \text{ div } b$
K. Osoitan, että molemmista puolista tulee $a \text{ div } (bc)$. Luvulle $k = a \text{ div } (bc)$ pätee M1:n mukaan $kbc \leq a < (k+1)bc$. Pätee $kc \leq a \text{ div } b < (k+1)c$ ja $k \leq (a \text{ div } b) \text{ div } c < k+1$, joten $(a \text{ div } b) \text{ div } c = k$. Vastaavasti $(a \text{ div } c) \text{ div } b = a \text{ div } (cb) = a \text{ div } (bc)$.

loppu