Kuhunkin kohtaan vastataan siihen TIMissä olevaan laatikkoon, jolla on sama nimi kuin kohdan edessä. Sinisten kohtien maksimipistemäärä on 1 ja vaaleansinisten 2. Kurssin aineistoa, muita lähteitä (myös netistä löytyviä) ja ohjelmia saa käyttää. Laskelmiesi tarkastamiseen kannattaa käyttää sivua `http://users.jyu.fi/%7eava/MathCheck_yleinen.html` Monet tästä PDF-tiedostosta maalaamalla kopioidut kaavat voi pudottaa sinne ja ne kelpaavat syntaksin puolesta sellaisinaan tai pienin muutoksin. **Avustajien käyttö on ankarasti kielletty.** Tentin maksimipistemäärä on 52, johon lisätään aiemmin palautetun esseen pisteet $0, \ldots, 4$ kaksinkertaisena, joten kaikkiaan maksimi on 60. Jos tekniikka ei toimi, meilaa `antti.valmari@jyu.fi`

Oletetaan että H tarkoittaa, että Lennu on hauva; K tarkoittaa, että Lennu on kissa; ja L tarkoittaa, että Lennu pitää luiden järsimisestä. Esitä seuraavat väitteet MathCheckin propositiologiikkasyntaksilla.

L1 Lennu on hauva tai kissa.
$H \vee K$

L2 Lennu on luiden järsimisestä pitävä hauva.
$L \wedge H$

L3 Jos Lennu on kissa, niin Lennu ei pidä luiden järsimisestä.
$K \rightarrow \neg L$

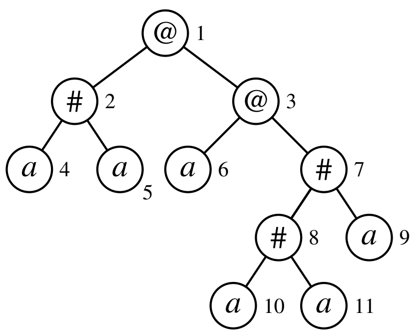
Sievennä seuraavat kaavat mahdollisimman lyhyeen muotoon. (Tässä tehtävässä totuusarvoja ovat F ja T. Toisin sanoen, totuusarvo U ei ole käytössä.)

S1 $\neg P \rightarrow Q$
$P \vee Q$

S2 $(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$
P

S3 $(\neg(P \wedge Q) \vee R) \wedge \neg(Q \vee R)$
$\neg(Q \vee R)$

Kuvassa on lausekkeen $a\#a@a@(a\#a\#a)$ lausekepuu. Kohdissa P1 ja P2 täytyy kirjoittaa myös perustelu. Perusteluksi riittää niiden solmujen numerot, joiden kohdalta asian näkee.



P1 Kumpi sitoo voimakkaammin, @ vai #? Ilman perustelua ei tule yhtään pistettä.
#, 1 2 5.

P2 Sitooko @ vasemmalle vai oikealle? Ilman perustelua ei tule yhtään pistettä.
oikealle, 1 3.

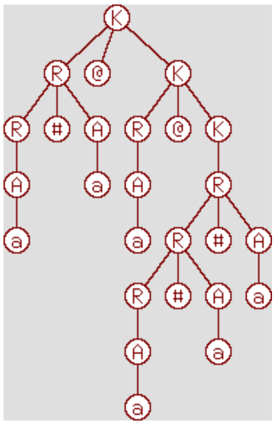
P3 Sulo Sulunperältä ei jaksa muistaa sitovuuden sääntöjä. Kun hänen on kirjoitettava lauseke, hän kirjoittaa niin paljon sulkuja että varmasti tulee oikea lausekepuu. Sulo haluaa kuvan lausekepuun. Mitä hän kirjoittaa?
$(a\#a)@(a@((a\#a)\#a))$

B1 Kirjoita sellainen BNF-määritelmä, että merkkijonosta `a#a@a@a#a#a` tulee kuvan mukainen jäsennyspuu. Kielessä ei käytetä mitään muita merkkejä kuin `a`, `#` ja `@`.

K ::= R | R@K

R ::= A | R#A

A ::= a



B2 Kirjoita sellainen BNF-määritelmä, että merkkijonosta `a#a@a@a#a#a` tulee kuvan mukainen jäsennyspuu, merkin `a` paikalla voi olla myös merkki `b`, ja merkkijonoissa voi käyttää sulkuja `(` ja `)` samaan tapaan kuin esimerkiksi matematiikassa. Kielessä ei käytetä mitään muita merkkejä kuin `a`, `b`, `#`, `@`, `(` ja `)`.

K ::= R | R@K

R ::= A | R#A

A ::= a | b | (K)

B3 Kerro sanallisesti, mitkä merkkijonot BNF-määritelmä
$X ::= a \mid aXa$ tuottaa.
ne, joissa on pariton määrä a-kirjaimia, eikä muuta

Jatkuu seuraavalla sivulla

X1 Lisää laskuun $(1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2$ kaksi järkevää välivaihetta.
$(1+x)(1+nx) = 1(1+nx)+x(1+nx) = 1+nx+x+xnx = 1+(n+1)x+nx^2$

X2 Perustele $\frac{1}{|2-x|+3} > 4 \Leftrightarrow 1 > 4(|2-x|+3)$.
Itseisarvo on aina vähintään nolla, joten $|2-x|+3 > 0$. Siksi $|2-x|+3 \neq 0$, joten ei tule nollalla jakoa. Epäyhtälön merkki säilyttää suuntansa kun molemmat puolet kerrotaan positiivisella luvulla.

Toinen vaihtoehto: Itseisarvo on aina vähintään nolla, joten $|2-x|+3 \geq 3$ ja $\frac{1}{|2-x|+3} \leq \frac{1}{3} < 4$. Siksi vasen puoli on aina F. Koska $|2-x|+3 \geq 3$, pätee $4(|2-x|+3) \geq 4 \cdot 3 = 12 > 1$, joten myös oikea puoli on aina F.

X3 Mikä virhe on seuraavassa päättelyssä? $\sqrt{x}+2 = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x-2 \Leftrightarrow x = (x-2)^2 \Leftrightarrow x = x^2-4x+4 \Leftrightarrow (x-4)x-(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$
$\sqrt{x} = x-2 \Leftrightarrow x = (x-2)^2$ on väärin silloin kun $x-2 = -\sqrt{x} < 0$.

Tehtävänä on sanoa "Taulukossa $A[1\ldots n]$ on pelkästään nollia tai pelkästään ykkösiä".

T1 Perustele, miksi tämä vastaus on väärin: $\forall i; 1 \leq i \leq n : A[i] = 0 \vee A[i] = 1$
Sille kelpaa taulukko, jossa on sekä nollia että ykkösiä (mutta ei muuta).

T2 Perustele, miksi tämä vastaus on väärin: $(A[1] = 0 \vee A[1] = 1) \wedge \forall i; 1 < i \leq n : A[i] = A[1]$
Se tuottaa tyhjällä taulukolla määrittelemättömän.

Kirjoita seuraavat taulukkoa $A[1\ldots n]$ koskevat väittämät.

T3 A:ssa on pelkästään nollia tai pelkästään ykkösiä.
$(\forall i; 1 \leq i \leq n : A[i] = 0) \vee (\forall i; 1 \leq i \leq n : A[i] = 1)$

T4 A:ssa on ainakin yksi nolla.
$\exists i; 1 \leq i \leq n : A[i] = 0$

T5 A:n kaikki alkiot ovat keskenään erisuuret.
$\forall i : \forall j; 1 \leq i < j \leq n : A[i] \neq A[j]$

T6 A:n alkiot alusta kohtaan i saakka (kohta i mukaan lukien) ovat nollia. Rajaa i mahdollisimman tiukasti siten, että nollien osuus voi olla tyhjä tai koko taulukko tai mitä tahansa siltä väliltä.
$0 \leq i \leq n \wedge \forall j; 1 \leq j \leq i : A[j] = 0$

T7 Perustele kurssilla esitetyn predikaattilogiikan BNF-määritelmän avulla, miksi
$\forall i; 1 \leq i \leq n : A[i] \geq 1 \wedge \exists j; 1 \leq j \leq n : A[j] = 1$ ja
$\exists j; 1 \leq j \leq n : A[j] = 1 \wedge \forall i; 1 \leq i \leq n : A[i] \geq 1$ eivät tarkoita samaa.
Kurssin BNF:n mukaan jälkimmäinen kvantifiointi on edellisen piirissä. Siksi kun $n = 0$, ensimmäinen kaava on muotoa "jokaisella tyhjän taulukon alkiolla ..." ja siksi tosi. Jälkimmäinen kaava vaatii, että taulukossa on ykkönen. Se on tyhjällä taulukolla epätosi.

T8 Lisää yhteen T7:n kaavoista sulut siten, että sen jälkeen kaavat tarkoittavat samaa.
$(\forall i; 1 \leq i \leq n : A[i] \geq 1) \wedge \exists j; 1 \leq j \leq n : A[j] = 1$

T9 Kerro lyhyesti suomeksi, mitä T8:n kaava väittää.
A:n pienin alkio on 1.

Terroristit ovat asentaneet moottoriresiinaan pommin ja lähettäneet sen rautatietä pitkin Mustamakkaralasta kohti Ruiskaupunkia. Matkaa on 150 km. Pommilta menee yhteen kilometriin 2 minuuttia. Poliisimestari Korppi ei pysty estämään räjähdystä, mutta pystyy vaikuttamaan siihen missä se tapahtuu. Hän on Lehmälahden seisakkeella 45 km Mustamakkaralasta Ruiskaupunkiin päin. Siellä on moottoriresiina, jonka hän voi lähettää joko Mustamakkaralaa tai Ruiskaupunkia kohti vauhdilla 3 minuuttia / kilometri. Räjähdys tapahtuu siellä missä resiinat törmäävät. Merkitse x:llä etäisyyttä Mustamakkaralasta kilometreinä. Merkitse t:llä aikaa pommin lähettämishetkestä minuutteina. Vastaustesi ei tarvitse toimia ennen pommin lähettämishetkeä eikä räjähdyshetken jälkeen.

K1 Kirjoita yhtälö, joka esittää ajan t pommin sijainnin x funktiona.
$t = 2x$

K2 Kirjoita yhtälö, joka esittää ajan t Korpin resiinan sijainnin x funktiona olettaen, että Korppi lähetti resiinansa samalla hetkellä kuin terroristit lähettivät pommin.
$t = 3|x - 45|$

K3 Millä etäisyydellä x Mustamakkaralasta pommi räjähtää? Kirjoita vastausruutuun paitsi lopputulos, myös ainakin yksi välivaihe MathCheckin kielellä.
$2x = 3|x - 45| \Leftrightarrow x < 45 \land 2x = -(3x - 135) \lor x \geq 45 \land 2x = 3x - 135$
$\Leftrightarrow x < 45 \land 5x = 135 \lor x \geq 45 \land x = 135 \Leftrightarrow x = 27 \lor x = 135$

K4 Korppi voi lähettää resiinansa samalla hetkellä tai myöhemmin kuin terroristit lähettivät pommin. Ilmaise mahdolliset räjähdyspaikat x kaavana, jossa ei esiinny muita muuttujia kuin x.
$27 \leq x \leq 135$

Jatkuu seuraavalla sivulla

Olkoot M, n ja m kokonaislukuja, ja $M > 0$. Kurssilla osoitettiin, että $(n+m) \bmod M$ riippuu luvun n osalta vain luvusta $n \bmod M$, toisin sanoen $(n+m) \bmod M = ((n \bmod M)+m) \bmod M$.

M1 Muotoile kaava, joka sanoo, että $(n+m) \bmod M$ riippuu luvun m osalta vain luvusta $m \bmod M$.
$(n+m) \bmod M = (n+(m \bmod M)) \bmod M$

M2 Todista M1-kohdan kaava. Saat käyttää kaavaa $(n+m) \bmod M = ((n \bmod M)+m) \bmod M$ ja kaikkia kokonaislukujen ominaisuuksia. Vihje: tämä on hyvin helppo tehtävä.
$(n+m) \bmod M = (m+n) \bmod M = ((m \bmod M)+n) \bmod M = (n+(m \bmod M)) \bmod M$

M3 Osoita vastaesimerkin avulla, että $(2^m) \bmod M = 2^{m \bmod M} \bmod M$ ei aina päde.
$2^2 \bmod 2 = 4 \bmod 2 = 0$ mutta $2^{2 \bmod 2} \bmod 2 = 2^0 \bmod 2 = 1$

M4 Riippuuko $n^3 \bmod M$ luvun n osalta vain luvusta $n \bmod M$? Perustele tai anna vastaesimerkki. Saat käyttää luentoruuduissa kerrottuja tosiasioita.
kertolaskulle vastaava pätee, joten $n^3 \bmod M = (n \cdot n \cdot n) \bmod M = ((n \bmod M) \cdot (n \bmod M) \cdot (n \bmod M)) \bmod M = (n \bmod M)^3 \bmod M$

Alla olevan ohjelman jokaisen muuttujan arvo on kokonaisluku, joka on vähintään 0 ja enintään $2^{32}-1$. Alussa $n = 2^{15} \wedge m = 2^{30} \wedge v = w = k = 0$. Muinaisissa mikroprosessoreissa kertolasku oli hidasta. Ohjelman idea on ratkaista eräs tehtävä ilman niitä.

```
1  while n > 0 do
2      if w + k + m ≤ a then
3          v := v + n
4          w := w + k + m
5          k := k + 2m
6      n := n div 2
7      m := m div 4
8      k := k div 2
9  { v² ≤ a ∧ (v+1)² > a }
```

O1 Missä muuttujassa tai muuttujissa ohjelma saa syötteensä?
a

O2 Missä muuttujassa tai muuttujissa ohjelma palauttaa tuloksensa?
v

O3 Minkä tehtävän ohjelma ratkaisee?
$v := \lfloor \sqrt{a} \rfloor$

O4 Kuinka monta kierrosta **while**-silmukka kiertää?
16

Seuraavaksi käydään läpi osa todistuksesta, että alla oleva kaava on **while**-silmukan invariantti. Saat kohdasta O6 alkaen olettaa, että se pätee aina rivin 1 alussa.

$$m = n^2 \wedge w = v^2 \wedge k = 2vn \wedge v^2 \leq a \wedge (n = 0 \wedge (v+1)^2 > a \vee (v+2n)^2 > a)$$

O5 Perustele, että se pätee kun rivin 1 alkuun tullaan ensimmäisen kerran.
$m = 2^{30} = (2^{15})^2$, $w = v^2 = 0$, $k = 2vn = 0$, $v^2 = 0 \leq a$ lukualueen vuoksi, ja $(v+2n)^2 = (2^{16})^2 = 2^{32} > a$ lukualueen vuoksi.

O6 Kirjoita kaava muotoa $m = \ldots$, joka on voimassa aina rivin 7 alussa.
$m = 4n^2$

O7 Kirjoita kaava muotoa $w = \ldots$, joka on voimassa aina rivin 4 alussa.
$w = (v-n)^2$

O8 Kirjoita kaava muotoa $k = \ldots$, joka on voimassa aina rivin 4 alussa.
$k = 2(v-n)n$

O9 Kirjoita kaava muotoa $w = \ldots$, joka on voimassa aina rivin 5 alussa, ja sievennä se muotoon, jossa $\ldots$ ei sisällä muuttujia m, w eikä k.
$w = (v-n)^2 + k + m = (v-n)^2 + 2(v-n)n + n^2 = v^2$

O10 Perustele, että rivin 5 lopussa $v^2 \leq a$.
Pätee $w+k+m = v^2 + 2vn + n^2 = (v+n)^2$ ja on testattu $w+k+m \leq a$, joten $(v+n)^2 \leq a$. Siksi sen jälkeen kun v muuttuu rivillä 3 pätee $v^2 \leq a$.

O11 Perustele, että rivin 6 alussa $v^2 \leq a$.
Jos mentiin then-haaran kautta se saadaan kohdasta O10, ja jos ei menty se saadaan suoraan invariantista.

Jatkuu seuraavalla sivulla

A Opiskelijat käyttivät hyvin vähän mahdollisuutta kysyä opettajilta neuvoa kurssin aikana. Sen sijaan he mieluummin vastasivat ”en osannut” -palautukseen esim. että eivät ymmärtäneet MathCheckin virheilmoitusta. Kirjoita oma arvelusi siitä, miksi opiskelijat toimivat näin.

Tässä muutamia vaihtoehtoja:

Verkkototeutuksen vuoksi opettajat jäivät etäisiksi, kun videotapaamisiakaan ei ollut. Siksi ei uskalla kysyä.

Vastausta olisi joutunut odottamaan niin kauan, ettei kannattanut kysyä. Yksi päiväkin odotusaikaa on paljon.

Jos kysyy ja saa neuvon, niin joutuu jatkamaan pähkäilyä tehtävän parissa. Se on työläämpää kuin kirjata itselleen vähemmän pisteitä.

loppu