Vastaa tentin järjestäjän antamalle paperille (ei kysymyspaperille). Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Kukin tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen.

A tarkoittaa, että aurinko paistaa. L tarkoittaa, että luen tenttiin. K tarkoittaa, että lähden kävelylle. Ilmaise seuraavat väittämät propositiologiikan kaavoina.

1. Aurinko paistaa mutta en lähde kävelylle. $A \wedge \neg K$
2. Lähden kävelylle tai luen tenttiin (tai sekä että). $K \vee L$
3. Lähden kävelylle tai luen tenttiin, mutta ei sekä että. $(K \vee L) \wedge \neg(K \wedge L)$

Sekalaisia kysymyksiä

4&5. Lentopallon erä loppuu, kun toisella joukkueella on ainakin 25 pistettä ja ainakin 2 pistettä enemmän kuin toisella. Siksi esimerkiksi 24–8, 25–24 ja 35–28 eivät ole mahdollisia lopputilanteita, mutta 25–8 ja 35–33 ovat. Pistemäärät ovat muuttujissa p ja q. Kirjoita kaava, joka sanoo, että tilanne on mahdollinen lopputilanne.
$p = 25 \wedge 0 \leq q \leq 23 \vee 25 < p = q+2 \vee q = 25 \wedge 0 \leq p \leq 23 \vee 25 < q = p+2$

6. Sijoita P:ksi F ja sievennä $P \vee (\neg P \wedge Q)$. Näytä ainakin yksi välivaihe.
$P \vee (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow \mathsf{F} \vee (\neg \mathsf{F} \wedge Q) \Leftrightarrow \mathsf{T} \wedge Q \Leftrightarrow Q$

7&8. Todista $P \vee Q \Leftrightarrow P \vee (\neg P \wedge Q)$ valitsemalla joko P tai Q, ja sijoittamalla siihen F ja T.
$\mathsf{F} \vee Q \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow \mathsf{T} \wedge Q \Leftrightarrow \mathsf{F} \vee (\neg \mathsf{F} \wedge Q)$ ja $\mathsf{T} \vee Q \Leftrightarrow \mathsf{T} \Leftrightarrow \mathsf{T} \vee (\neg \mathsf{T} \wedge Q)$

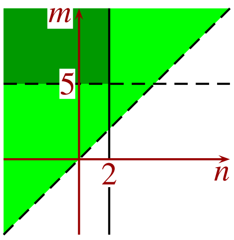
9. Kirjoita jokin sellainen De Morganin laki, jossa ei esiinny kvanttoreita.
$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

10. Kirjoita jokin sellainen De Morganin laki, jossa esiintyy kvanttoreita.
$\neg \forall x : P(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$

11&12. Olkoon φ kaava $x < 0 \vee x \geq y+1$. Kirjoita jokin sellainen kaava ψ, että $\varphi \Rightarrow \psi$ mutta ei $\varphi \Leftrightarrow \psi$. Perustele vastauksesi.
T pätee aina, joten $\varphi \Rightarrow \mathsf{T}$. Jos $x = y = 0$, niin φ ei päde mutta T pätee, joten ei $\varphi \Leftrightarrow \mathsf{T}$.

13&14. Piirrä kuva ja sen avulla sievennä $n \leq 2 \wedge m > 5 \vee \neg(m < n \vee n = m)$ mahdollisimman lyhyeen muotoon.

$n < m$



15&16. Ratkaise $2|x-3| \leq x$ käyttäen merkintöjä $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ jne. kuten kurssilla on opetettu.
$x-3 < 0 \wedge -2(x-3) \leq x \vee x-3 \geq 0 \wedge 2(x-3) \leq x$
Tapaus 1: $x-3 < 0 \wedge -2(x-3) \leq x \;\Leftrightarrow\; x < 3 \wedge 6 \leq 3x \;\Leftrightarrow\; 2 \leq x < 3$
Tapaus 2: $x-3 \geq 0 \wedge 2(x-3) \leq x \;\Leftrightarrow\; x \geq 3 \wedge x \leq 6 \;\Leftrightarrow\; 3 \leq x \leq 6$
Yhteensä $2 \leq x < 3 \vee 3 \leq x \leq 6 \;\Leftrightarrow\; 2 \leq x \leq 6$

17. Ilman että käytät symboleita `div` ja `mod`, kirjoita kaava, joka sanoo, että n on jaollinen seitsemällä. $\exists x : n = 7x$

Suomenna seuraavat taulukosta $A[1 \ldots n]$ puhuvat väitteet. Pyri ymmärrettävään kieleen. Esimerkiksi väitteelle $\forall i\,;\, 1 \leq i < n : A[i] \leq A[i+1]$ vastaus ”jokaiselle i, joka on vähintään 1 ja vähemmän kuin n, pätee että $A[i]$ on pienempi tai yhtäsuuri kuin $A[i+1]$” ei kelpaa, mutta vastaus ”A on kasvavassa suuruusjärjestyksessä” kelpaa erittäin hyvin.

18. $\forall i : \forall j\,;\, 1 \leq i < j \leq n : A[i] = A[j]$ Kaikki alkiot ovat yhtäsuuret.
19. $\exists i : \exists j\,;\, 1 \leq i < j \leq n : A[i] = A[j]$ Jokin alkio esiintyy ainakin kahdesti.
20. $\forall i : \exists j\,;\, 1 \leq i < j \leq n : A[i] = A[j]$ Aina epätosi.

käännä

Esitä kaavana seuraavat taulukosta $A[1\ldots n]$ puhuvat väitteet.

21. A:ssa ei ole yhtään kolmosta. $\neg\exists i\,;\, 1 \leq i \leq n : A[i] = 3$

22. Kohdassa k on kolmonen. $1 \leq k \leq n \wedge A[k] = 3$

23. A on keko. (Keossa kukin alkio on vähintään yhtäsuuri kuin sen lapset. $A[1]$:n lapset ovat $A[2]$ ja $A[3]$, $A[2]$:n lapset ovat $A[4]$ ja $A[5]$, $A[3]$:n lapset ovat $A[6]$ ja $A[7]$ ja niin edelleen niin pitkälle kuin taulukkoa riittää.)
    $\forall i\,;\, 2 \leq i \leq n : A[i] \leq A[i \text{ div } 2]$

Sekalaisia kysymyksiä

24. Kirjoita aliohjelma, joka palauttaa T jos $A[1\ldots n]$ on keko, ja F muuten.
    for $i := 2$ **to** n **do**
       if $A[i] > A[i \text{ div } 2]$ **then return** F
    return T

25&26. Kirjoita aliohjelma, joka palauttaa T jos ja vain jos täsmälleen yksi A:n alkioista on suurempi kuin edellinen alkio.
    $j := 0$
    for $i := 2$ **to** n **do**
       if $A[i] > A[i-1]$ **then**
          $j := j + 1$
          if $j > 1$ **then return** F
    return $j = 1$

27&28. Eräs logiikan tärkeistä päättelysäännöistä kuuluu seuraavasti:

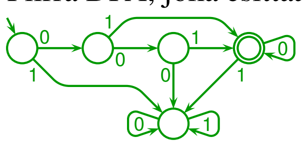
> Olkoot $\mathfrak{f}$ ja $\mathfrak{g}$ lausekkeita, ja $\varphi(a)$ kaava, jossa ei esiinny symboleita $\forall$ eikä $\exists$.
> Jos $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$ niin $\varphi(\mathfrak{f}) \Leftrightarrow \varphi(\mathfrak{g})$.

Mitkä ovat $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ ja $\varphi(a)$, kun tällä säännöllä johdetaan

$$2x < 3y - 1 \wedge 2x + y^2 \neq 3y - 1 \leq 5(3y-1) + 7 \Leftrightarrow$$
$$2x < 2x + y^2 \wedge 2x + y^2 \neq 3y - 1 \leq 5(2x + y^2) + 7 \text{ ?}$$

$\mathfrak{f}$ on $3y - 1$, $\mathfrak{g}$ on $2x + y^2$ ja $\varphi(a)$ on $2x < a \wedge 2x + y^2 \neq 3y - 1 \leq 5a + 7$.

29. Piirrä DFA, joka esittää kaavaa $x = 1 \vee x = 2$.



30. Mitä asiaa haluaisit kurssille lisää, ja mitä voitaisiin jättää pois?

loppu