Vastaa tentin järjestäjän antamalle paperille (ei kysymyspaperille). Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Kukin tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen. Mallivastauksista vain yksi on pitempi kuin 3 riviä.

Tarkoittakoon S että syön sämpylöitä, P että syön puuroa ja M että puuro on maidotonta. Esitä seuraavat väittämät kaavoina.

1. Syön sämpylöitä tai puuroa.
   $S \vee P$
2. En syö molempia.
   $\neg(S \wedge P)$
3. Syön sämpylöitä, jos puurossa on maitoa.
   $\neg M \rightarrow S$

Seuraavissa tehtävissä käytä kaksiarvologiikka, eli P, Q ja R eivät voi saada arvoa $\mathbf{U}$. Koska tavoitteena on osata muitakin menetelmiä kuin totuustaulu, vähennetään täysikokoisen totuustaulun käyttämisestä 0,5 pistettä.

4. Sievennä $\neg P \vee (Q \vee P) \wedge R$, kun $P \Leftrightarrow \mathbf{T}$. Näytä ainakin yksi välivaihe.
   $\mathbf{F} \vee (Q \vee \mathbf{T}) \wedge R \Leftrightarrow R$
5. Sievennä $\neg P \vee (Q \vee P) \wedge R$, kun $P \Leftrightarrow \mathbf{F}$. Näytä ainakin yksi välivaihe.
   $\mathbf{T} \vee (Q \vee \mathbf{F}) \wedge R \Leftrightarrow \mathbf{T}$
6. Sievennä $\neg P \vee (Q \vee P) \wedge R$.
   $\neg P \vee R$

7&8. Sievennä $(P \wedge \neg Q \vee \neg R) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (P \vee R)$. Näytä ainakin yksi välivaihe.
$(P \wedge \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \wedge P \vee R) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

9. Paina negaatiot alas ja sievennä $\neg(P \wedge \neg Q \vee \neg R)$. Näytä ainakin yksi välivaihe.
   $\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg\neg R \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge R$

Tentin pisterajat on annettu taulukossa `rajat`, jonka lailliset indeksit ovat 0, 1, 2, 3 ja 4. Opiskelijan saama pistemäärä on muuttujassa `pist`.

10. Esimerkiksi pisterajat [12, 9, 15, 6, 9] eivät ole mielekkäät. Mikä ehto pisterajojen täytyy täyttää?
    Niiden täytyy olla kasvavassa suuruusjärjestyksessä.
11. Kirjoita kaava, joka on tosi täsmälleen silloin, kun arvosanan kuuluu olla 3. Siinä ei saa olla muita muuttujia kuin `pist` ja `rajat`.
    $\texttt{rajat}[2] \leq \texttt{pist} < \texttt{rajat}[3]$
12. Kirjoita ohjelmanpätkä, joka laskee arvosanan.

```
int arvosana = 0;
while( arvosana < 5 && pist >= rajat[ arvosana ] ){ ++arvosana; }
```

Tavoitteena on ratkaista $|x-2| < 3x+14$ kuten kurssilla on opetettu. Ratkaisuprosessin ei tarvitse olla jaettu kohtiin tarkasti alla olevien tehtävien mukaisesti. Riittää, että se on kokonaisuutena kurssin mukainen, käyttää logiikan symboleita, on oikein ja tuottaa oikean lopputuloksen.

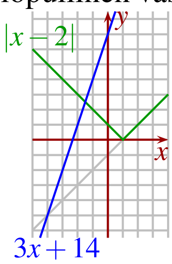
13&14. Kirjoita kaava, joka saadaan kaavasta $|x-2| < 3x+14$ poistamalla $|$ ja $|$ kuten kurssilla on opetettu.
$x-2 < 0 \land -(x-2) < 3x+14 \lor x-2 \geq 0 \land x-2 < 3x+14$

15. Ratkaise yksi edellä syntyneistä $\lor$:n toisistaan erottamista tapauksista. Käytä ratkaisuprosessisi esittämisessä yhtä tai useampaa symboleista $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ja $\Leftarrow$.
tapaus $x-2 \geq 0$: $x-2 < 3x+14 \Leftrightarrow 2x > -2-14 = -16 \Leftrightarrow x > -8$, joten $x \geq 2$

16. Ratkaise loput edellä syntyneistä $\lor$:n toisistaan erottamista tapauksista. Käytä ratkaisuprosessisi esittämisessä yhtä tai useampaa symboleista $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ja $\Leftarrow$.
tapaus $x-2 < 0$: $-(x-2) < 3x+14 \Leftrightarrow 4x > 2-14 = -12 \Leftrightarrow x > -3$, joten $-3 < x < 2$

17. Kirjoita loput ratkaisuprosessista ja lopullinen vastaus.
$x < 2 \land x > -3 \lor x \geq 2 \land x > -8 \Leftrightarrow -3 < x < 2 \lor 2 \leq x \Leftrightarrow x > -3$

18. Piirrä x-y-koordinaatisto ja sinne funktioiden $|x-2|$ ja $3x+14$ kuvaajat. Valitse pienimmät ja suurimmat näytettävät koordinaatit siten, että kuvastasi näkyy, että edellä antamasi lopullinen vastaus on oikein.



Käännä!

(Sekalaisia kysymyksiä)

19. Anna jokaisesta seuraavista esimerkki, joka ei kelpaa esimerkiksi mihinkään aikaisempaan kohtaan. Siis esimerkiksi kohtaan (c) pitää antaa lauseke, joka ei ole samalla vakio eikä muuttuja. Puheenaiheena on reaaliluvut.
(a) vakio (b) muuttuja (c) lauseke (d) atomikaava (e) kaava (f) päättelyaskel
(a) 1 (b) x (c) $x+1$ (d) $x > 1$ (e) $x > 1 \lor x = 0$ (f) $x = 0 \Rightarrow x > 1 \lor x = 0$

20. Suomenna seuraava taulukosta $A[1 \ldots n]$ puhuva väite. Älä suomenna kaavamaisesti, vaan pyri sellaiseen suomennokseen, jonka viisivuotiaskin ymmärtää.

$$\forall i; 1 \leq i \leq n : \exists j; 1 \leq j \leq n : A[i] \neq A[j]$$

Taulukko on tyhjä, tai siinä on ainakin kahta eri alkiota.

21. Eräs logiikan tärkeistä päättelysäännöistä kuuluu seuraavasti:

> Olkoot $\mathfrak{f}$ ja $\mathfrak{g}$ lausekkeita, ja $\varphi(a)$ kaava, jossa ei esiinny symboleita $\forall$ eikä $\exists$.
> Jos $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$ niin $\varphi(\mathfrak{f}) \Leftrightarrow \varphi(\mathfrak{g})$.

Mitkä ovat $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ ja $\varphi(a)$, kun tällä säännöllä johdetaan

$$2x < 3y-1 \land 2x+y^2 \neq 3y-1 \leq 5(3y-1)+7 \Leftrightarrow$$
$$2x < 2x+y^2 \land 2x+y^2 \neq 3y-1 \leq 5(2x+y^2)+7 \ ?$$

$\mathfrak{f}$ on $3y-1$, $\mathfrak{g}$ on $2x+y^2$ ja $\varphi(a)$ on $2x < a \land 2x+y^2 \neq 3y-1 \leq 5a+7$.

Esitä kaavana seuraavat taulukosta $A[1\ldots n]$ puhuvat väitteet.

22. A:n ensimmäinen alkio toistuu jossakin A:n kohdassa.
$\exists j; 2 \leq j \leq n : A[j] = A[1]$

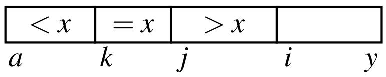
23. Kohdassa i esiintyvä alkio on A:n toiseksi viimeinen alkio.
$i = n - 1 \geq 1$

24. Ainakin yksi A:n alkioista on suurempi kuin edellinen alkio.
$\exists i; 1 < i \leq n : A[i] > A[i-1]$

25. Täsmälleen yksi A:n alkioista on suurempi kuin edellinen alkio.
$\exists i; 1 < i \leq n : A[i] > A[i-1] \wedge \forall j; 1 < j \leq n \wedge i \neq j : A[j] \leq A[j-1]$

Alla on ohjelmanpätkä ja sen suorituksen tilannetta rivin 2 lopussa havainnollistava kuva.

```
1  j := a; k := a
2  for i := a to y do
3     if A[i] ≤ x then
4        apu := A[i]; A[i] := A[j]
5        if apu = x then A[j] := apu
6        else A[j] := A[k]; A[k] := apu; k := k + 1
7        j := j + 1
```



26&27. Kirjoita kaava, joka kertoo mahdollisimman paljon taulukon A sisällöstä kun ohjelma on lopettanut.
$(\forall h; a \leq h < k : A[h] < x) \wedge (\forall h; k \leq h < j : A[h] = x) \wedge (\forall h; j \leq h \leq y : A[h] > x)$

28. Kirjoita välttämätön ja riittävä alkutilannetta koskeva ehto sille, että ohjelman lopetettua $k \neq j$. Esitä vastaus sanallisesti (siis ei kaavana).
Taulukossa $A[a\ldots y]$ on ainakin yksi x:n suuruinen alkio.

29. Kirjoita tehtävän 28 vastaus kaavana.
$\exists h; a \leq h \leq y : A[h] = x$

30. Kirjoita kaava, joka kertoo mahdollisimman paljon osataulukon $A[j\ldots i]$ sisällöstä rivin 5 lopussa.
$A[j] = x \wedge \forall h; j < h \leq i : A[i] > x$

loppu