Vastaa tentin järjestäjän antamalle paperille (ei kysymyspaperille). Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Kukin tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen. Perusteluissa riittää tärkeimmät asiat. Mallivastauksista vain kolme on pitempiä kuin 3 riviä.

Tarkoittakoon K että kesä on kiva vuodenaika, S että syksy on kiva vuodenaika ja T että talvi on kiva vuodenaika. Esitä seuraavat väittämät kaavoina.

1. Ainakin yksi näistä kolmesta vuodenajasta on kiva.
   $K \vee S \vee T$

2. Kesä on mutta syksy ei ole kiva.
   $K \wedge \neg S$

3. Jos syksy on kiva, niin ei ole niin että sekä talvi että kesä on kiva.
   $S \rightarrow \neg(T \wedge K)$

Seuraavissa tehtävissä käytä kaksiarvologiikka, eli P, Q ja R eivät voi saada arvoa **U**. Koska tavoitteena on osata muitakin menetelmiä kuin totuustaulu, vähennetään täysikokoisen totuustaulun käyttämisestä 0,5 pistettä.

4. Perustele $(P \wedge Q) \vee \neg(P \vee R) \;\Rightarrow\; Q \vee \neg R$ tai anna sille vastaesimerkki.
   Pätee. Jos $P \Leftrightarrow \mathbf{F}$, niin $(P \wedge Q) \vee \neg(P \vee R) \Leftrightarrow (\mathbf{F} \wedge Q) \vee \neg(\mathbf{F} \vee R) \Leftrightarrow \neg R \Rightarrow Q \vee \neg R$.
   Jos $P \Leftrightarrow \mathbf{T}$, niin $(P \wedge Q) \vee \neg(P \vee R) \Leftrightarrow (\mathbf{T} \wedge Q) \vee \neg(\mathbf{T} \vee R) \Leftrightarrow Q \Rightarrow Q \vee \neg R$.

5. Perustele $(P \wedge Q) \vee \neg(P \vee R) \;\Leftarrow\; Q \vee \neg R$ tai anna sille vastaesimerkki.
   Vastesimerkki $P \Leftrightarrow \mathbf{T}$ ja $Q \Leftrightarrow R \Leftrightarrow \mathbf{F}$.

6. Paina kaikki negaatiot alas kaavassa $\neg(P \wedge \neg(Q \wedge \neg R \wedge (\neg Q \vee P)) \vee \neg Q \wedge R)$ ja poista jokainen $\neg\neg$.
   $(\neg P \vee Q \wedge \neg R \wedge (\neg Q \vee P)) \wedge (Q \vee \neg R)$

Tavoitteena on ratkaista $2|x+2| \leq x+5$ kuten kurssilla on opetettu. Ratkaisuprosessin ei tarvitse olla jaettu kohtiin tarkasti alla olevien tehtävien mukaisesti. Riittää, että se on kokonaisuutena kurssin mukainen, käyttää logiikan symboleita, ja on oikein ja tuottaa oikean lopputuloksen.

7&8. Kirjoita kaava, joka saadaan kaavasta $2|x+2| \leq x+5$ poistamalla | ja | kuten kurssilla on opetettu.
   $x+2 < 0 \wedge -2(x+2) \leq x+5 \;\vee\; x+2 \geq 0 \wedge 2(x+2) \leq x+5$

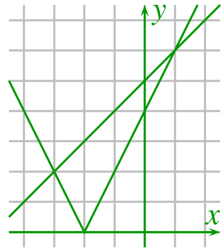
9. Ratkaise yksi edellä syntyneistä $\vee$:n toisistaan erottamista tapauksista. Käytä ratkaisuprosessisi esittämisessä yhtä tai useampaa symboleista $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ja $\Leftarrow$.
   tapaus $x+2 \geq 0$: $2(x+2) \leq x+5 \;\Leftrightarrow\; x \leq 5-4 = 1$, joten $-2 \leq x \leq 1$

10. Ratkaise loput edellä syntyneistä $\vee$:n toisistaan erottamista tapauksista. Käytä ratkaisuprosessisi esittämisessä yhtä tai useampaa symboleista $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ja $\Leftarrow$.
    tapaus $x+2 < 0$: $-2(x+2) \leq x+5 \;\Leftrightarrow\; -3x \leq 9 \;\Leftrightarrow\; x \geq -3$, joten $-3 \leq x < -2$

11. Kirjoita loput ratkaisuprosessista ja lopullinen vastaus.
    $x < -2 \wedge x \geq -3 \;\vee\; x \geq -2 \wedge x \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -3 \leq x < -2 \vee -2 \leq x \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -3 \leq x \leq 1$

12. Piirrä x-y-koordinaatisto ja sinne funktioiden $2|x+2|$ ja $x+5$ kuvaajat. Valitse pienimmät ja suurimmat näytettävät koordinaatit siten, että kuvastasi näkyy, että edellä antamasi

lopullinen vastaus on oikein.



Alla oleva toiminto palauttaa rengaspuskurissa olevien alkioiden määrän. Alkiot ovat taulukossa `taulu`. Rengaspuskurin `R` tietoihin ja toimintoihin pääsee käsiksi kirjoittamalla `R.vapaa`, `R.taulu`, `R.määrä()` jne.

```
int määrä(){ return (vapaa + koko - vanhin) % koko; }
```

13&14. Kirjoita aliohjelma, joka palauttaa `true` jos ja vain jos rengaspuskurissa `R` on sama sisältö kuin rengaspuskurissa `S`.

```
if( R.määrä() != S.määrä() ){ return false; }
int i = R.vanhin, j = S.vanhin;
while( i != r.vapaa ){
  if( R.taulu[ i ] != S.taulu[ j ] ){ return false; }
  i = (i + 1) % R.koko; j = (j + 1) % S.koko;
}
return true;
```

Käännä!

Taulukko H indeksoidaan $5,\dots,m+2$.

15. Kirjoita kaava, joka sanoo että H:ssa on täsmälleen yksi alkio.
$m = 3$

16. Kirjoita kaava, joka sanoo että H:ssa on alkio, jonka arvo on 2.
$\exists i\,; 5 \leq i \leq m+2 : H[i] = 2$

17. Kirjoita kaava, joka sanoo että H:n kohdassa i on 2.
$5 \leq i \leq m+2 \wedge H[i] = 2$

18. Kirjoita kaava, joka sanoo että H:n pienin alkio on arvoltaan 2. Se saattaa esiintyä H:ssa useasti.
$\exists i\,; 5 \leq i \leq m+2 : H[i] = 2 \wedge \forall j\,; 5 \leq j \leq m+2 : H[j] \geq 2$

19. Kirjoita kaava, joka sanoo että H:n pienin alkio on arvoltaan 2. Se ei esiinny H:ssa useasti.
$\exists i\,; 5 \leq i \leq m+2 : H[i] = 2 \wedge \forall j\,; 5 \leq j \leq m+2 \wedge i \neq j : H[j] > 2$

Erään lukujoukon määritelmässä voidaan käyttää seuraavia kaavoja. Ne pätevät jokaisella x ja y.

1. $S(x) \neq 0$	3. $x + 0 = x$	5. $x \cdot 0 = 0$
2. $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$	4. $x + S(y) = S(x+y)$	6. $x \cdot S(y) = x + x \cdot y$

20. Kirjoita kaava, joka tarkoittaa samaa kuin $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$, mutta jossa $\rightarrow$ ei esiinny.
$\neg(S(x) = S(y)) \vee x = y$

21. Sievennä $S(S(S(0))) + S(S(0))$ muotoon, jossa $+$ ja $\cdot$ eivät esiinny.
$S(S(S(0))) + S(S(0)) = S(S(S(S(0))) + S(0)) = S(S(S(S(S(0))) + 0)) = S(S(S(S(S(0)))))$

22. Kerro edellisen vastauksesi ensimmäisestä sievennysaskeleesta, mitä kaavoista 1, ..., 6 käytit, mikä oli x:n tilalla ja mikä oli y:n tilalla.
4., $x = S(S(S(0)))$ ja $y = S(0)$.

23. Valitse tehtävän 21 vastauksestasi jokin sievennysaskel, jossa käytit jotain muuta kaavoista 1, ..., 6 kuin tehtävän 22 vastauksessasi. Kerro, mitä kaavaa käytit, mikä oli x:n tilalla ja mikä oli y:n tilalla.
$S(S(S(S(S(0))) + 0)) = S(S(S(S(S(0)))))$, 3., $x = S(S(S(0)))$ ja y:tä ei ole.

24. Osoita, että jos määritellään $1 = S(0)$, niin $x \cdot 1 = x$. Kerro, mitä kaavoja käytit (mutta älä kerro, mitä oli x:n ja y:n tilalla).
$x \cdot 1 = x \cdot S(0) = x + x \cdot 0 = x + 0 = x$
Käytettiin määritelmää ja kaavoja 6, 5 ja 3.

25. Kuinka monta eri lukua kaavojen 1, ..., 6 mukaisessa joukossa on? Mistä sen voi tietää?
Äärettömästi. 0, $S(0)$, $S(S(0))$, ... ovat kaikki eri lukuja, koska 1:n vuoksi 0 ei ole sama kuin mikään muu, ja 2.:n vuoksi mikään $S(\ldots)$ ei voi olla ensimmäinen $S(\ldots)$ joka on sama kuin jokin muu $S(\ldots)$.

(Sekalaisia kysymyksiä)

26. Luettele neljä mahdollisimman isoa kaavaan $\forall i\,; 0 \leq i < n : A[i] = A[n+1-i]$ sisältyvää lauseketta.
$A[n+1-i]$, $n+1-i$, $n+1$, $A[i]$

27. Anna reaaliluvuista puhuva esimerkki, jossa $\varphi \Leftrightarrow \psi$ ei tarkoita samaa kuin $\varphi \equiv \psi$.
$\frac{6}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 3$, mutta ei $\frac{6}{x} = 2 \equiv x = 3$ koska kun $x = 0$ on sen vasen puoli määrittelemätön mutta oikea puoli on epätosi.

28&29. Perustele, että $\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$ toimii kuten monien ohjelmointikielten *eka* `||` *toka*.
Jos $\varphi \equiv \mathbf{F}$, niin $\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \equiv \psi$. Se vastaa sitä, että jos *eka* tuottaa `false`, niin lasketaan *toka* ja palautetaan sen tulos koko toiminnon tuloksena. Jos tällöin *toka* kaatuu, niin *eka* `||` *toka* kaatuu, mikä vastaa sitä, että jos $\psi \equiv \mathbf{U}$, niin $\mathbf{F} \vee (\neg\mathbf{F} \wedge \psi) \equiv \mathbf{U}$. Jos $\varphi \equiv \mathbf{T}$, niin $\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \equiv \mathbf{T}$. Se vastaa sitä, että jos *eka* tuottaa `true`, niin ei lasketa *toka* vaan palautetaan `true` koko toiminnon tuloksena. Jos $\varphi \equiv \mathbf{U}$, niin $\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \equiv \mathbf{U}$. Se vastaa sitä, että jos *eka* kaatuu, niin *eka* `||` *toka* kaatuu.

30. Kirjoita kaava, jossa ei ole muita atomikaavoja kuin φ, $\lceil\varphi\rfloor$, ψ ja $\lceil\psi\rfloor$, ja joka tuottaa aina saman totuusarvon kuin $\lceil\varphi \vee \psi\rfloor$!
$\lceil\varphi\rfloor \wedge \lceil\psi\rfloor \;\vee\; \lceil\varphi\rfloor \wedge \varphi \;\vee\; \lceil\psi\rfloor \wedge \psi$

loppu