Vastaa tentin järjestäjän antamalle paperille (ei kysymyspaperille). Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Perusteluissa riittää tärkeimmät asiat. Ne mahtuvat 3 riviin ja melkein aina vähempäänkin.

Tarkoittakoon K että kesä on kiva vuodenaika, S että syksy on kiva vuodenaika ja T että talvi on kiva vuodenaika. Esitä seuraavat väittämät propositiologiikan kaavoina.

1. Ainakin yksi näistä kolmesta vuodenajasta on kiva. $K \vee S \vee T$
2. Kesä on mutta syksy ei ole kiva. $K \wedge \neg S$
3. Jos syksy on kiva, niin ei ole niin että sekä talvi että kesä on kiva. $S \rightarrow \neg(T \wedge K)$

Seuraavien kohtien tavoitteena on todistaa $P \wedge \neg(Q \vee R) \vee Q \wedge \neg(R \vee \neg P) \;\Leftrightarrow\; P \wedge \neg R$ tai löytää sille vastaesimerkki.

4. Sijoita Q:hun F ja sievennä $\Leftrightarrow$:n vasen puoli. Näytä ainakin yksi järkevä välivaihe.
   $P \wedge \neg(\mathsf{F} \vee R) \vee \mathsf{F} \wedge \neg(R \vee \neg P) \;\Leftrightarrow\; P \wedge \neg R \vee \mathsf{F} \;\Leftrightarrow\; P \wedge \neg R$
5. Sijoita Q:hun T ja sievennä $\Leftrightarrow$:n vasen puoli. Näytä ainakin yksi järkevä välivaihe.
   $P \wedge \neg(\mathsf{T} \vee R) \vee \mathsf{T} \wedge \neg(R \vee \neg P) \;\Leftrightarrow\; P \wedge \neg \mathsf{T} \vee \neg(R \vee \neg P) \;\Leftrightarrow\; P \wedge \mathsf{F} \vee \neg R \wedge P \;\Leftrightarrow\; \mathsf{F} \vee P \wedge \neg R$
   $\Leftrightarrow\; P \wedge \neg R$
6. Viimeistele todistus tai anna vastaesimerkki.
   Koska kumpikin sijoitus tuotti $\Leftrightarrow$:n oikean puolen, ovat vasen ja oikea puoli yhtäpitävät.

Olkoon $\varphi(X)$ propositiologiikan kaava, jossa ei esiinny muita propositiosymboleita kuin X.

7. Kurssilla esitettiin helposti tarkastettavissa oleva ehto, joka takaa, että jos $P \Rightarrow Q$ niin $\varphi(Q) \Rightarrow \varphi(P)$. Mikä se on?
   Jokainen X:n esiintymä on parittoman määrän negaatioita vaikutuspiirissä, eikä minkään muun kuin $\neg$, $\wedge$ ja $\vee$ vaikutuspiirissä.
8. Anna esimerkki sellaisesta kaavasta $\varphi(X)$, että kohdan 7 ehto ei päde, mutta silti jos $P \Rightarrow Q$ niin $\varphi(Q) \Rightarrow \varphi(P)$. $X \vee \neg X$

Tarkoittakoon $K(x)$ että bussi x vie Keljoon. Ilmaise seuraavat logiikan merkinnöillä.

9. Mikään bussi ei vie Keljoon. $\forall x : \neg K(x)$ tai $\neg \exists x : K(x)$
10. Kaikki bussit vievät Keljoon. $\forall x : K(x)$
11. Kaikki bussit eivät vie Keljoon. $\neg \forall x : K(x)$ tai $\exists x : \neg K(x)$

Kirjoita kaavat, joilla on seuraavat ominaisuudet.

12. Se on tosi jos lausekkeet saavat arvonsa kokonaisluvuista, mutta on epätosi jos lausekkeet saavat arvonsa luonnollisista luvuista. $\exists x : x < 0$
13. Se on tosi jos lausekkeet saavat arvonsa kokonaisluvuista, mutta on epätosi jos lausekkeet saavat arvonsa reaaliluvuista. $\neg \exists x : 0 < x < 1$

Seuraavissa kohdissa puheenaiheena ovat reaaliluvut.

14. Anna jokaisesta seuraavista esimerkki, joka ei kelpaa esimerkiksi mihinkään aikaisempaan kohtaan. Siis esimerkiksi kohtaan (c) pitää antaa lauseke, joka ei ole samalla vakio eikä muuttuja.
(a) vakio (b) muuttuja (c) lauseke (d) atomikaava (e) kaava (f) päättelyaskel
(a) 1 (b) x (c) $x+1$ (d) $x>1$ (e) $x>1 \vee x=0$ (f) $x=0 \Rightarrow x>1 \vee x=0$

15. Anna esimerkki sellaisesta kaavasta $\varphi(x)$, että $a<b \wedge \varphi(a) \Rightarrow a<b \wedge \varphi(b)$ pätee mutta $a<b \wedge \varphi(a) \Leftrightarrow a<b \wedge \varphi(b)$ ei päde. $0<x$

käännä

Taulukko $T[1\ldots n]$ indeksoidaan 1:stä n:ään. Kaikki lausekkeet saavat arvonsa luonnollisista luvuista. Tarkastellaan seuraavaa kaavaa:

$$0 \leq i \leq n \wedge \forall j\,; 1 \leq j \leq i : \exists k\,; i < k \leq n : T[j] = T[k]$$

16. Jos $n=0$, niin millä i:n arvoilla kaava on epätosi? Perustele.
$i \geq 1$, koska silloin $0 \leq i \leq n$ ei päde.

17. Jos $n=0$, niin millä i:n arvoilla kaava on tosi? Perustele.
$i=0$, koska silloin $0 \leq i \leq n$ pätee ja $\forall j\,; 1 \leq j \leq i :$ käy läpi tyhjän välin.

18. Olkoon $n=4$. Kirjoita esimerkki sellaisesta T, että kaava on tosi mahdollisimman monella i:n arvolla. $[0,0,0,0]$

19. Jos $n>0$, niin millä i:n arvoilla kaava on tosi riippumatta T:n sisällöstä? Perustele.
$i=0$, koska silloin $0 \leq i \leq n$ pätee ja $\forall j\,; 1 \leq j \leq i :$ käy läpi tyhjän välin.

20. Jos $n>0$, niin, millä i:n arvoilla kaava on epätosi riippumatta T:n sisällöstä? Perustele.
$i \geq n$. Jos $i>n$, niin $0 \leq i \leq n$ ei päde. Jos $i=n$, niin $\exists k\,; i<k \leq n : \ldots$ ei voi toteutua, vaikka sen tarvitsee toteutua mm. kun $j=1$.

21. Jos $n>0$, niin millä i:n arvoilla kaavan totuusarvo riippuu T:n sisällöstä? Perustele.
$0<i<n$. Jos jokainen T:n alkio on 0, niin kaava on tosi, koska $0 \leq i \leq n$ on tosi ja jokaisella $1 \leq j \leq i$ valinta $k=n$ tuottaa $i<k \leq n$ ja $T[j]=T[k]$. Jos $T[1]=0$ mutta muut T:n alkiot ovat 1, niin kaava on epätosi, koska $\exists k\,; \ldots$ ei toteudu kun $j=1$.

22. Jos $n>0$, niin millä i:n arvoilla kaava sanoo, että kaikki T:n alkiot ovat yhtäsuuret? Perustele.
$i=n-1$. Silloin kaava sanoo, että jokainen muu T:n alkio on yhtäsuuri kuin $T[n]$.

23. Jos $n>0$, niin millä i:n arvoilla kaava ei sano, että kaikki T:n alkiot ovat yhtäsuuret? Perustele.
$i \neq n-1$. Jos $i=0$ niin kaava on aina tosi ja jos $i \geq n$ niin kaava on aina epätosi, kuten edellä on todettu. Jos $1 \leq i < n-1$ niin kaava toteutuu kun $T[n]=1$ ja muut alkiot ovat 0.

Osakkeen arvo kunakin päivänä on taulukossa $A[1\ldots n]$, missä $n>0$. Pari (h,k) on *nousujakso* jos ja vain jos $1 \leq h < k \leq n \wedge A[h] < A[k]$. Sen pituus on $k-h+1$. Oheisen algoritmin tehtävänä on selvittää mahdollisimman pitkän nousujakson pituus.

24. Kirjoita A, jossa ei ole yhtään nousujaksoa ja jolle $n=5 \wedge \forall h\,; 1 \leq h < n : A[h] \neq A[h+1]$.
[5, 4, 3, 2, 1]

25. Kirjoita A, jossa on täsmälleen kaksi nousujaksoa. $[2,1,3]$

26. Perustele, että jos (h,k) on mahdollisimman pitkä nousujakso, niin $\forall r\,; k < r \leq n : A[k] > A[r]$.
Jos pätisi $k < r \leq n \wedge A[k] \leq A[r]$, niin (h,r) olisi pitempi nousujakso kuin (h,k).

27. Perustele, että kun oheinen ohjelma saapuu riville 4, on jokaisen mahdollisimman pitkän nousujakson päättymispäivä taulukossa $V[1 \ldots m]$.
Rivin 3 alussa $i < V[m] \leq n$. Jos i on mahdollisimman pitkän nousujakson päättymispäivä, niin kohdan 26 mukaan $A[i] > A[V[m]]$, joten i pinotaan V:hen.

28. Jos $1 \leq h < k \leq m$ rivillä 4, niin mitkä seuraavista voivat olla totta?
(a) $V[h] < V[k]$ (b) $A[V[h]] < A[V[k]]$ (c) $V[h] = V[k]$ (d) $A[V[h]] = A[V[k]]$
(e) $V[h] > V[k]$ (f) $A[V[h]] > A[V[k]]$ (b) ja (e)

29. Perustele, että jos rivin 7 ehto pätee, niin $i < V[m]$.
Koska *pisin* aloittaa nollasta ja voi vain kasvaa tai pysyä muuttumattomana, aina $pisin \geq 0$. Rivin 7 ehdon mukaan $V[m] > pisin + i$. Niistä seuraa $V[m] > i$.

30. Tarkastellaan tilannetta rivin 8 alussa. Olkoot a ja ℓ mahdollisimman pitkän nousujakson alku- ja loppukohta, $1 \leq x \leq Vsize$, $V[x] = \ell$ ja $1 \leq i < a$. Perustele, että $m > x$.
$A[i] \geq A[\ell]$, koska muutoin (i,ℓ) olisi vielä pitempi nousujakso. Rivin 6 ehdon vuoksi $A[V[m]] > A[i]$, joten $A[V[m]] > A[\ell] = A[V[x]]$. Siitä seuraa $m > x$ kohdan 28 vuoksi.

```
1  m := 1; V[1] := n;
2  for i := n − 1 downto 1 do
3      if A[i] > A[V[m]] then ++m; V[m] := i;
4  pisin := 0; Vsize := m;
5  for i := 1 to n do
6      while m > 0 && A[V[m]] > A[i] do
7          if V[m] − i > pisin then pisin := V[m] − i;
8          −−m;
```

loppu