Vastaa tentin järjestäjän antamalle paperille. Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. +1-merkityt tehtävät ovat 2 pisteen ja muut yhden pisteen arvoisia. Kannattaa näyttää välivaiheita, koska ne saattavat pelastaa osan pisteistä jos lopullinen vastaus on väärin.

Tarkoittakoon L että logiikka on kivaa, M että matematiikka on kivaa ja O että ohjelmointi on kivaa. Ilmaise seuraavat logiikan merkinnöillä.

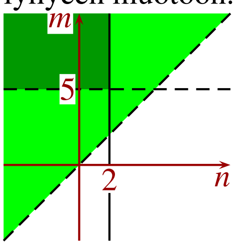
1. Ohjelmointi on kivaa, mutta matematiikka ja logiikka eivät ole. $O \wedge \neg M \wedge \neg L$
2. Matematiikka tai ohjelmointi on kivaa jos ja vain jos logiikka on kivaa. $M \vee O \leftrightarrow L$
3. Jos matematiikka tai ohjelmointi on kivaa, niin myös logiikka on kivaa. $M \vee O \rightarrow L$

Ovatko seuraavat päteviä? Perustele.

4. $\neg(P \vee Q \wedge R) \ \Leftrightarrow\ \neg P \wedge \neg Q \vee \neg R$ Ei, vastaesimerkki: $P \Leftrightarrow \mathbf{T}$ ja $R \Leftrightarrow \mathbf{F}$.
5. $P \vee Q \ \Leftrightarrow\ P \vee (\neg P \wedge Q)$
   Kyllä. Jos $P \Leftrightarrow \mathbf{F}$, niin molemmat puolet sievenevät muotoon Q. Jos $P \Leftrightarrow \mathbf{T}$, niin molemmat puolet sievenevät muotoon $\mathbf{T}$.
6. $x = 1 \wedge y \geq 2 \wedge y < x \ \Leftrightarrow\ x - 1 > y = x + 1$
   Kyllä, koska kumpikin puoli on aina $\mathbf{F}$. Vasemmalta saadaan $2 \leq y < x = 1$ joten $2 < 1$, ja oikealta $x > x + 2$.
7. $\mathbf{T} \rightarrow \forall x : \psi \ \Leftrightarrow\ \forall x : \mathbf{T} \rightarrow \psi$
   Kyllä. Koska $\mathbf{T} \rightarrow Q \ \Leftrightarrow\ Q$, sievenee kumpikin puoli muotoon $\forall x : \psi$.
8. $\varphi \rightarrow \forall x : \psi \ \Leftrightarrow\ \forall x : \varphi \rightarrow \psi$ (Oleta, että x ei esiinny vapaana φ:ssä.)
   Kyllä. Valitaan mielivaltainen arvo jokaiselle muuttujalle. Koska x ei esiinny vapaana φ:ssä, ei φ:n totuusarvo riipu x:stä, joten se on sama kummassakin kohdassa. Jos se on $\mathbf{T}$, niin tulos saadaan edellisestä tehtävästä. Jos se on $\mathbf{F}$, niin tulos saadaan siitä että koska $\mathbf{F} \rightarrow Q \ \Leftrightarrow\ \mathbf{T}$ ja $\forall x : \mathbf{T} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{T}$, sievenee kumpikin puoli muotoon $\mathbf{T}$.

Sekalaisia tehtäviä

9+1. Piirrä kuva ja sen avulla sievennä $n \leq 2 \wedge m > 5 \vee \neg(m < n \vee n = m)$ mahdollisimman lyhyeen muotoon. $n < m$



11. Olkoon φ kaava $x < 0 \vee x \geq y + 1$. Kirjoita jokin sellainen kaava ψ, että $\varphi \Rightarrow \psi$ mutta ei $\varphi \Leftrightarrow \psi$. Perustele, että $\varphi \Rightarrow \psi$ mutta ei $\varphi \Leftrightarrow \psi$.
    $\mathbf{T}$ pätee aina, joten $\varphi \Rightarrow \mathbf{T}$. Jos $x = y = 0$, niin φ ei päde mutta $\mathbf{T}$ pätee, joten ei $\varphi \Leftrightarrow \mathbf{T}$.
12. Mitä ovat f, g ja φ, kun lakia

    Jos $\forall$ ja $\exists$ eivät esiinny $\varphi(x)$:ssä, niin $f = g \wedge \varphi(f) \ \Leftrightarrow\ f = g \wedge \varphi(g)$

    käyttämällä johdetaan $y = 2x - 3 \wedge 3x - 2y = 2 \ \Leftrightarrow\ y = 2x - 3 \wedge 3x - 2(2x - 3) = 2$?
    f on y, g on $2x - 3$ ja $\varphi(a)$ on $3x - 2a = 2$.

Suomenna seuraavat taulukosta $A[1\dots n]$ puhuvat väitteet. Älä suomenna kaavamaisesti, vaan pyri sellaiseen suomennokseen, jonka Pihtiputaan mummokin ymmärtää.

13. $n > 0 \land \forall i; 2 \leq i \leq n : A[i] < 0$
    Kaikki alkiot paitsi ehkä ensimmäinen (joka on olemassa) ovat negatiivisia.

14. $\forall i; 1 \leq i \leq n : \forall j; 1 \leq j \leq n : A[i] \neq A[j]$
    Taulukko on tyhjä.

Esitä kaavana seuraavat taulukosta $A[1\dots n]$ puhuvat väitteet.

15. A:n ensimmäinen alkio ei ole A:n pienin alkio. $\exists j; 2 \leq j \leq n : A[j] < A[1]$

16. Kohdassa i esiintyvä alkio on A:n viimeinen alkio. $i = n \geq 1$

17. Täsmälleen yksi A:n alkioista on suurempi kuin edellinen alkio.
    $\exists i; 1 < i \leq n : A[i] > A[i-1] \land \forall j; 1 < j \leq n \land i \neq j : A[j] \leq A[j-1]$

Tehtävät jatkuvat paperin toisella puolella.

18. Kirjoita aliohjelma, joka palauttaa **T** jos ja vain jos täsmälleen yksi A:n alkioista on suurempi kuin edellinen alkio.

```
j := 0
for i := 2 to n do
    if A[i] > A[i-1] then
        j := j + 1
        if j > 1 then return F
return j = 1
```

Seuraava ohjelma järjestää taulukon $A[1\dots n]$ kasvavaan suuruusjärjestykseen.

```
1  for i := 1 to n-1 do
2      m := i
3      for j := i+1 to n do
4          if A[j] < A[m] then m := j
5      x := A[i]   A[i] := A[m]   A[m] := x
```

19. Kirjoita kaava, joka sanoo, että A:n alkuosan alkiot ovat enintään yhtäsuuria kuin loppuosan alkiot. Valitse kaavan yksityiskohdat siten, että alkuosa ja loppuosa kattavat yhteensä koko taulukon ja kaava on voimassa aina rivin 1 alussa.
    $\forall j; 1 \leq j < i : \forall k; i \leq k \leq n : A[j] \leq A[k]$

20. Miksi tehtävän 19 kaava on voimassa, kun rivin 1 alkuun tullaan ensimmäisen kerran?
    Alkuosa on silloin tyhjä, joten kaava on triviaalisti tosi.

21. Miksi tehtävän 19 kaava on voimassa, kun rivin 1 alkuun tullaan toisen, kolmannen jne. kerran?
    Riveillä 2, ..., 5 etsitään mahdollisimman pieni loppuosan alkio ja vaihdetaan se loppuosan ensimmäiseksi. Sitten kasvatetaan alku- ja loppuosien välistä rajaa yhdellä. Alkuosa siis kasvaa ja loppuosa pienenee yhdellä alkiolla. Riittää osoittaa, että alkuosan uusi alkio on enintään yhtäsuuri kuin loppuosaan jäävät alkiot. Se on, koska se on aiemmassa loppuosassa mahdollisimman pieni.

22. Miksi ohjelma toimii oikein, vaikka ulompi **for**-silmukka lopettaa ennen kuin $i = n$?
Kohtaan n jäävä alkio ei riko suuruusjärjestystä, koska tehtävän 19 kaavan mukaan se on vähintään yhtäsuuri kuin muut.

23+1. Mitä vielä tarvitaan sen todistamiseksi, että ohjelma toimii oikein?
Aina rivin 1 alussa alkuosa on kasvavassa suuruusjärjestyksessä. Aluksi alkuosa on tyhjä ja myöhemmin sen loppuun lisätään alkio, joka on ainakin yhtäsuuri kuin alkuosan aiemmat alkiot.

Erääseen tietorakenteeseen voidaan lisätä alkio toiminnolla l, lukea erään alkion arvo toiminnolla a, ja poistaa alkio toiminnolla p. Tyhjää tietorakennetta merkitään E. Toiminnot $E\,.\,a$ ja $E\,.\,p$ on kielletty, ja muut käyttäytyvät seuraavasti (x saa arvonsa alkioista ja X tietorakenteen tiloista):

(1) $\forall x : E\,.\,l(x)\,.\,a = x$
(2) $\forall x : E\,.\,l(x)\,.\,p = E$
(3) $\forall X : \forall x : X\,.\,l(x) \neq E$
(4) $\forall X : X \neq E \rightarrow \forall x : X\,.\,l(x)\,.\,a = X\,.\,a$
(5) $\forall X : X \neq E \rightarrow \forall x : X\,.\,l(x)\,.\,p = X\,.\,p\,.\,l(x)$

25. Sievennä $E\,.\,l(3)\,.\,l(8)\,.\,l(1)\,.\,l(0)\,.\,a$ mahdollisimman lyhyeen muotoon.
$E\,.\,l(3)\,.\,l(8)\,.\,l(1)\,.\,l(0)\,.\,a =_{(3,4)} E\,.\,l(3)\,.\,l(8)\,.\,l(1)\,.\,a =_{(3,4)}$
$E\,.\,l(3)\,.\,l(8)\,.\,a =_{(3,4)} E\,.\,l(3)\,.\,a =_{(1)} 3$

26. Sievennä $E\,.\,l(3)\,.\,p\,.\,l(8)\,.\,l(1)\,.\,p\,.\,l(0)\,.\,a$ mahdollisimman lyhyeen muotoon.
$E\,.\,l(3)\,.\,p\,.\,l(8)\,.\,l(1)\,.\,p\,.\,l(0)\,.\,a =_{(2)} E\,.\,l(8)\,.\,l(1)\,.\,p\,.\,l(0)\,.\,a =_{(3,5)}$
$E\,.\,l(8)\,.\,p\,.\,l(1)\,.\,l(0)\,.\,a =_{(2)} E\,.\,l(1)\,.\,l(0)\,.\,a =_{(3,4)} E\,.\,l(1)\,.\,a =_{(1)} 1$

27. Perustele $\forall X : \forall x : \forall y : X\,.\,l(x)\,.\,p\,.\,l(y) = X\,.\,l(x)\,.\,l(y)\,.\,p$ tai anna vastaesimerkki.
(3):n mukaan $X\,.\,l(x) \neq E$, joten (5) antaa väitteen.

28+1. Olkoon kukin t_i joko p tai muotoa $l(x)$. Perustele, että jokainen $E\,.\,t_1\,.\,t_2\,.\,\cdots\,.\,t_n\,.\,a$ voidaan sieventää muotoon, jossa joko esiintyy kielletty toiminto tai ei esiinny p.
$E\,.\,p \cdots$ on kielletty. Jos $n \geq 1$, niin $E\,.\,l(x_1)\,.\,l(x_2) \cdots .\,l(x_n)\,.\,p \cdots$ sievenee (5):llä muotoon $E\,.\,l(x_1)\,.\,p\,.\,l(x_2) \cdots .\,l(x_n) \cdots$ josta (2):lla muotoon $E\,.\,l(x_2) \cdots .\,l(x_n) \cdots$. Tätä toistamalla saadaan poistettua kaikki sallitut p:t.

30. Joko kerro millä nimellä tätä tietorakennetta tavallisesti kutsutaan, tai anna sille itse valitsemasi luonteva nimi. Se saa olla suomeksi tai englanniksi. jono queue

loppu