Vastaa tentin järjestäjän antamalle paperille. Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. +1-merkityt tehtävät ovat 2 pisteen ja muut yhden pisteen arvoisia. Kannattaa näyttää välivaiheita, koska ne saattavat pelastaa osan pisteistä jos lopullinen vastaus on väärin.

Tarkoittakoon L että logiikka on kivaa, M että matematiikka on kivaa ja O että ohjelmointi on kivaa. Ilmaise seuraavat logiikan merkinnöillä.

1. Ohjelmointi on kivaa, mutta matematiikka ja logiikka eivät ole.
2. Matematiikka tai ohjelmointi on kivaa jos ja vain jos logiikka on kivaa.
3. Jos matematiikka tai ohjelmointi on kivaa, niin myös logiikka on kivaa.

Ovatko seuraavat päteviä? Perustele.

4. $\neg(P \vee Q \wedge R) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \vee \neg R$
5. $P \vee Q \Leftrightarrow P \vee (\neg P \wedge Q)$
6. $x = 1 \wedge y \geq 2 \wedge y < x \Leftrightarrow x - 1 > y = x + 1$
7. $\mathbf{T} \rightarrow \forall x : \psi \Leftrightarrow \forall x : \mathbf{T} \rightarrow \psi$
8. $\varphi \rightarrow \forall x : \psi \Leftrightarrow \forall x : \varphi \rightarrow \psi$ (Oleta, että x ei esiinny vapaana φ:ssä.)

Sekalaisia tehtäviä

9+1. Piirrä kuva ja sen avulla sievennä $n \leq 2 \wedge m > 5 \vee \neg(m < n \vee n = m)$ mahdollisimman lyhyeen muotoon.

11. Olkoon φ kaava $x < 0 \vee x \geq y + 1$. Kirjoita jokin sellainen kaava ψ, että $\varphi \Rightarrow \psi$ mutta ei $\varphi \Leftrightarrow \psi$. Perustele, että $\varphi \Rightarrow \psi$ mutta ei $\varphi \Leftrightarrow \psi$.
12. Mitä ovat f, g ja φ, kun lakia

    Jos $\forall$ ja $\exists$ eivät esiinny $\varphi(x)$:ssä, niin $f = g \wedge \varphi(f) \Leftrightarrow f = g \wedge \varphi(g)$

    käyttämällä johdetaan $y = 2x - 3 \wedge 3x - 2y = 2 \Leftrightarrow y = 2x - 3 \wedge 3x - 2(2x - 3) = 2$?

Suomenna seuraavat taulukosta $A[1 \ldots n]$ puhuvat väitteet. Älä suomenna kaavamaisesti, vaan pyri sellaiseen suomennokseen, jonka Pihtiputaan mummokin ymmärtää.

13. $n > 0 \wedge \forall i; 2 \leq i \leq n : A[i] < 0$
14. $\forall i; 1 \leq i \leq n : \forall j; 1 \leq j \leq n : A[i] \neq A[j]$

Esitä kaavana seuraavat taulukosta $A[1 \ldots n]$ puhuvat väitteet.

15. A:n ensimmäinen alkio ei ole A:n pienin alkio.
16. Kohdassa i esiintyvä alkio on A:n viimeinen alkio.
17. Täsmälleen yksi A:n alkioista on suurempi kuin edellinen alkio.

Tehtävät jatkuvat paperin toisella puolella.

18. Kirjoita aliohjelma, joka palauttaa **T** jos ja vain jos täsmälleen yksi A:n alkioista on suurempi kuin edellinen alkio.

Seuraava ohjelma järjestää taulukon $A[1\dots n]$ kasvavaan suuruusjärjestykseen.

```
1  for i := 1 to n − 1 do
2      m := i
3      for j := i + 1 to n do
4          if A[j] < A[m] then m := j
5      x := A[i]   A[i] := A[m]   A[m] := x
```

19. Kirjoita kaava, joka sanoo, että A:n alkuosan alkiot ovat enintään yhtäsuuria kuin loppuosan alkiot. Valitse kaavan yksityiskohdat siten, että alkuosa ja loppuosa kattavat yhteensä koko taulukon ja kaava on voimassa aina rivin 1 alussa.

20. Miksi tehtävän 19 kaava on voimassa, kun rivin 1 alkuun tullaan ensimmäisen kerran?

21. Miksi tehtävän 19 kaava on voimassa, kun rivin 1 alkuun tullaan toisen, kolmannen jne. kerran?

22. Miksi ohjelma toimii oikein, vaikka ulompi **for**-silmukka lopettaa ennen kuin $i = n$?

23+1. Mitä vielä tarvitaan sen todistamiseksi, että ohjelma toimii oikein?

Erääseen tietorakenteeseen voidaan lisätä alkio toiminnolla l, lukea erään alkion arvo toiminnolla a, ja poistaa alkio toiminnolla p. Tyhjää tietorakennetta merkitään E. Toiminnot $E\,.\,a$ ja $E\,.\,p$ on kielletty, ja muut käyttäytyvät seuraavasti (x saa arvonsa alkioista ja X tietorakenteen tiloista):

(1)	$\forall x : E\,.\,l(x)\,.\,a = x$	(4)	$\forall X : X \neq E \rightarrow \forall x : X\,.\,l(x)\,.\,a = X\,.\,a$
(2)	$\forall x : E\,.\,l(x)\,.\,p = E$	(5)	$\forall X : X \neq E \rightarrow \forall x : X\,.\,l(x)\,.\,p = X\,.\,p\,.\,l(x)$
(3)	$\forall X : \forall x : X\,.\,l(x) \neq E$		

25. Sievennä $E\,.\,l(3)\,.\,l(8)\,.\,l(1)\,.\,l(0)\,.\,a$ mahdollisimman lyhyeen muotoon.

26. Sievennä $E\,.\,l(3)\,.\,p\,.\,l(8)\,.\,l(1)\,.\,p\,.\,l(0)\,.\,a$ mahdollisimman lyhyeen muotoon.

27. Perustele $\forall X : \forall x : \forall y : X\,.\,l(x)\,.\,p\,.\,l(y) = X\,.\,l(x)\,.\,l(y)\,.\,p$ tai anna vastaesimerkki.

28+1. Olkoon kukin t_i joko p tai muotoa $l(x)$. Perustele, että jokainen $E\,.\,t_1\,.\,t_2\,.\,\cdots\,.\,t_n\,.\,a$ voidaan sieventää muotoon, jossa joko esiintyy kielletty toiminto tai ei esiinny p.

30. Joko kerro millä nimellä tätä tietorakennetta tavallisesti kutsutaan, tai anna sille itse valitsemasi luonteva nimi. Se saa olla suomeksi tai englanniksi.

loppu