Nimesi: ______________________ Syntymäaikasi: __________

Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Jokainen tehtävä on 6 pisteen arvoinen. Pisteet jakautuvat tasan alakohtiin (a), (b) jne., ellei toisin sanota. Sievennystehtävissä kaava pitää saada mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Kannattaa näyttää välivaiheita, koska ne saattavat pelastaa osan pisteistä jos lopullinen vastaus on väärin.

1. (a) Tarkoittakoon L että Suomi voittaa loppuottelun, P että Suomi voittaa pronssiottelun, ja M että Suomi saa mitalin. Ilmaise kaavoina
   ”Suomi ei voita molempia otteluita” $\neg(L \wedge P)$

   ”jos Suomi voittaa jommankumman ottelun, niin Suomi saa mitalin”. $L \vee P \rightarrow M$

   (b) Todista $P \vee Q \Leftrightarrow P \vee (\neg P \wedge Q)$ valitsemalla joko P tai Q, ja sijoittamalla siihen $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{T}$. $\mathbf{F} \vee Q \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow \mathbf{T} \wedge Q \Leftrightarrow \mathbf{F} \vee (\neg \mathbf{F} \wedge Q)$

   $\mathbf{T} \vee Q \Leftrightarrow \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T} \vee (\neg \mathbf{T} \wedge Q)$

   (c) Sievennä $(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \vee \neg R)$. $\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge R) \Leftrightarrow \neg P \wedge R$

2. (a) Sievennä $x \leq 2 \wedge y > 5 \vee \neg(y < x \vee x = y)$. $x \leq 2 < 5 < y \vee y > x \Leftrightarrow x < y$

   (b) Olkoon φ kaava $x < 0 \vee x \geq y + 1$. Kirjoita jokin sellainen kaava ψ, että $\varphi \Rightarrow \psi$ mutta ei $\varphi \Leftrightarrow \psi$. Perustele, että $\varphi \Rightarrow \psi$ mutta ei $\varphi \Leftrightarrow \psi$. $\mathbf{T}$ pätee aina,

   joten $\varphi \Rightarrow \mathbf{T}$. Jos $x = y = 0$, niin φ ei päde mutta $\mathbf{T}$ pätee, joten ei $\varphi \Leftrightarrow \mathbf{T}$.

   (c) Kirjassa käytettiin erästä kunta-aksioomaa ja lakia

   > jos $\forall$ ja $\exists$ eivät esiinny $\varphi(x)$:ssä ja jos jokaisessa
   > mahdollisessa tilanteessa $f = g$, niin $\varphi(f) \Leftrightarrow \varphi(g)$

   tuottamaan $x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 0 - 12 = 0$. Kirjoita kyseinen kunta-aksiooma kaavana, sekä kerro, mitkä olivat f, g ja φ.

   $\forall a : a + 0 = 0$. Symboli f oli $x^2 + 4x$, g oli $x^2 + 4x + 0$ ja $\varphi(x)$ oli $x - 12 = 0$.

3. Sohjopalloturnaukseen osallistuvat joukkueet A, B, ..., H. Jäljellä on kaksi ottelua: finaali, jossa pelaavat C ja G, sekä pronssiottelu, jossa pelaavat B ja H. Kummassakin niistä toinen joukkue voittaa ja toinen häviää (tasapeliä ei voi tulla). Finaalin voittaja saa kultaa, finaalin häviäjä saa hopeaa, pronssiottelun voittaja saa pronssia, eikä muita mitaleita jaeta. ”Jos ... niin ...” tulkitaan materiaalisena implikaationa eli kuten $\rightarrow$. Jokaisessa kohdassa luettele ne joukkueet X, joille väittämä on totta. Perustele vastauksesi.

   (a) Jos X voittaa vielä yhdenkin ottelun, niin X saa kultaa.

   ACDEFG: ADEF eivät voi enää voittaa. CG saavat voittaessaan kultaa, BH eivät.

   (b) Jos X häviää vielä yhdenkin ottelun, niin X saa kultaa.

   ADEF: ne eivät voi enää hävitä. Häviäjä ei koskaan saa kultaa.

   Suomenna seuraavat taulukosta $A[1 \ldots n]$ puhuvat väitteet. Älä suomenna kaavamaisesti, vaan pyri sellaiseen suomennokseen, jonka viisivuotiaskin ymmärtää.

   (c) $\forall i ; 1 \leq i \leq n : \exists j ; 1 \leq j \leq n : A[i] \neq A[j]$

   Taulukko on tyhjä, tai siinä on ainakin kahta eri alkiota.

   (d) $1 \leq i \leq n \wedge \forall j ; 1 \leq j \leq n \wedge i \neq j : A[j] > A[i]$

   Kohdassa i (joka on laillisella alueella) oleva alkio on pienempi kuin muut alkiot.

Tehtävät jatkuvat paperin toisella puolella.

Esitä kaavana seuraavat taulukosta $A[1 \ldots n]$ puhuvat väitteet.

(e) A:ssa ei ole yhtään kolmosta. $\neg\exists i; 1 \leq i \leq n : A[i] = 3$ ____

(f) A on keko. (Keossa kukin alkio on vähintään yhtäsuuri kuin sen lapset. $A[1]$:n lapset ovat $A[2]$ ja $A[3]$, $A[2]$:n lapset ovat $A[4]$ ja $A[5]$, $A[3]$:n lapset ovat $A[6]$ ja $A[7]$ ja niin edelleen niin pitkälle kuin taulukkoa riittää.) $\forall i; 2 \leq i \leq n : A[i] \leq A[i \text{ div } 2]$ ____

4. Tässä tehtävässä kaikki muuttujat saavat arvonsa kokonaisluvuista. Kokonaisluku n on *jaollinen* kokonaisluvulla m, missä $m \neq 0$, jos ja vain jos on olemassa sellainen kokonaisluku k, että $n = km$. *Alkuluku* tarkoittaa ykköstä suurempaa kokonaislukua, joka ei ole jaollinen muilla positiivisilla kokonaisluvuilla kuin ykkösellä ja itsellään.

   (a) Millä kokonaisluvuilla 15 on jaollinen? -15, -5, -3, -1, 1, 3, 5 ja 15 ____

   Millä kokonaisluvuilla 0 on jaollinen? Jokaisella muulla kuin 0 [koska $0 = 0m$]. ____

   (b) Kirjoita kaava, joka sanoo että p on alkuluku. Älä kirjoita suoraa käännöstä sanallisesta kuvauksesta, vaan lyhyt ja selkeä samaa tarkoittava kaava.

   $p > 1 \land \neg\exists k : \exists m : k > 1 \land m > 1 \land p = km$ ____

   (c) Kirjoita yksinkertainen ohjelmanpätkä, joka palauttaa `true` jos ja vain jos kokonaisluku p on alkuluku. Muutoin se palauttaa `false`. Sen ei tarvitse olla tehokas.

```
if p < 2 then return false
for i := 2 to p − 1 do
    if p mod i = 0 then return false
return true
```

5. Erääseen tietorakenteeseen voidaan lisätä alkio toiminnolla l, lukea erään alkion arvo toiminnolla a, ja poistaa alkio toiminnolla p. Tyhjää tietorakennetta merkitään E. Toiminnot $E\,.\,a$ ja $E\,.\,p$ on kielletty, ja muut käyttäytyvät seuraavasti (x saa arvonsa alkioista ja X tietorakenteen tiloista):

(1)	$\forall x : E\,.\,l(x)\,.\,a = x$	(4)	$\forall X : X \neq E \rightarrow \forall x : X\,.\,l(x)\,.\,a = X\,.\,a$
(2)	$\forall x : E\,.\,l(x)\,.\,p = E$	(5)	$\forall X : X \neq E \rightarrow \forall x : X\,.\,l(x)\,.\,p = X\,.\,p\,.\,l(x)$
(3)	$\forall X : \forall x : X\,.\,l(x) \neq E$		

   (a) Sievennä $E\,.\,l(3)\,.\,l(8)\,.\,l(1)\,.\,l(0)\,.\,a$.

   $E\,.\,l(3)\,.\,l(8)\,.\,l(1)\,.\,l(0)\,.\,a =_{(3,4)} E\,.\,l(3)\,.\,l(8)\,.\,l(1)\,.\,a =_{(3,4)}$
   $E\,.\,l(3)\,.\,l(8)\,.\,a =_{(3,4)} E\,.\,l(3)\,.\,a =_{(1)} 3$

   (b) Sievennä $E\,.\,l(3)\,.\,p\,.\,l(8)\,.\,l(1)\,.\,p\,.\,l(0)\,.\,a$.

   $E\,.\,l(3)\,.\,p\,.\,l(8)\,.\,l(1)\,.\,p\,.\,l(0)\,.\,a =_{(2)} E\,.\,l(8)\,.\,l(1)\,.\,p\,.\,l(0)\,.\,a =_{(3,5)}$
   $E\,.\,l(8)\,.\,p\,.\,l(1)\,.\,l(0)\,.\,a =_{(2)} E\,.\,l(1)\,.\,l(0)\,.\,a =_{(3,4)} E\,.\,l(1)\,.\,a =_{(1)} 1$

   (c) Perustele $\forall X : \forall x : \forall y : X\,.\,l(x)\,.\,p\,.\,l(y) = X\,.\,l(x)\,.\,l(y)\,.\,p$ tai anna vastaesimerkki.

   (3):n mukaan $X\,.\,l(x) \neq E$, joten (5) antaa väitteen. ____

   (de) Olkoon kukin t_i joko p tai muotoa $l(x)$. Perustele, että jokainen $E\,.\,t_1\,.\,t_2\,.\cdots.\,t_n\,.\,a$ voidaan sieventää muotoon, jossa joko esiintyy kielletty toiminto tai ei esiinny p. $E\,.\,p\cdots$ on kielletty. Jos $n \geq 1$, niin $E\,.\,l(x_1)\,.\,l(x_2)\cdots.\,l(x_n)\,.\,p\cdots$ sievenee (5):llä muotoon $E\,.\,l(x_1)\,.\,p\,.\,l(x_2)\cdots.\,l(x_n)\cdots$ josta (2):lla muotoon $E\,.\,l(x_2)\cdots.\,l(x_n)\cdots$. Tätä toistamalla saadaan poistettua kaikki sallitut p:t.

   (f) Joko kerro millä nimellä tätä tietorakennetta tavallisesti kutsutaan, tai anna sille itse valitsemasi luonteva nimi. Se saa olla suomeksi tai englanniksi. jono queue

loppu