

Nimesi: _____ Syntymäaikasi: _____

Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Jokainen tehtävä on 6 pisteen arvoinen. Pisteet ja-
kautuvat tasan alakohtiin (a), (b) jne., ellei toisin sanota. Sievennystehtävissä kaava pitää saada
mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Kannattaa näyttää välivaiheita, koska ne saattavat
pelastaa osan pisteistä jos lopullinen vastaus on väärin.

1. (a) Tarkoittakoon L että Suomi voittaa loppuottelun, P että Suomi voittaa pronssiotte-
lun, ja M että Suomi saa mitalin. Ilmaise kaavoina
”Suomi ei voita molempia otteluita” _____
”jos Suomi voittaa jommankumman ottelun, niin Suomi saa mitalin”. _____
 - (b) Todista $P \vee Q \Leftrightarrow P \vee (\neg P \wedge Q)$ valitsemalla
joko P tai Q , ja sijoittamalla siihen **F** ja **T**. _____

 - (c) Sievennä $(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \vee \neg R)$. _____
 2. (a) Sievennä $x \leq 2 \wedge y > 5 \vee \neg(y < x \vee x = y)$. _____
 - (b) Olkoon ϕ kaava $x < 0 \vee x \geq y + 1$. Kirjoita jokin sellainen kaava ψ ,
että $\phi \Rightarrow \psi$ mutta ei $\phi \Leftrightarrow \psi$. Perustelee, että $\phi \Rightarrow \psi$ mutta ei $\phi \Leftrightarrow \psi$. _____

 - (c) Kirjassa käytettiin erästä kunta-aksiomaa ja lakia
jos \forall ja \exists eivät esiinny $\phi(x)$:ssä ja jos jokaisessa
mahdollisessa tilanteessa $f = g$, niin $\phi(f) \Leftrightarrow \phi(g)$
tuottamaan $x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 0 - 12 = 0$. Kirjoita
kyseinen kunta-aksioma kaavana, sekä kerro, mitkä olivat f , g ja ϕ . _____

 3. Sohjopalloturnaukseen osallistuvat joukkueet A, B, ..., H. Jäljellä on kaksi ottelua: finaali,
jossa pelaavat C ja G, sekä pronssiottelu, jossa pelaavat B ja H. Kummassakin niistä
toinen joukkue voittaa ja toinen häviää (tasapeliä ei voi tulla). Finaalin voittaja saa kul-
taa, finaalin häviäjä saa hopeaa, pronssiottelun voittaja saa pronssia, eikä muita mitaleita
jaeta. ”Jos ... niin ...” tulkitaan materiaalisena implikaationa eli kuten \rightarrow . Jokaisessa
kohdassa luettele ne joukkueet X, jolle väittämä on totta. Perustelee vastauksesi.
 - (a) Jos X voittaa vielä yhdenkin ottelun, niin X saa kultaa. _____

 - (b) Jos X häviää vielä yhdenkin ottelun, niin X saa kultaa. _____

- Suomenna seuraavat taulukosta $A[1 \dots n]$ puhuvat väitteet. Älä suomenna kaavamaisesti,
vaan pyri sellaiseen suomennokseen, jonka viisivuotiaskin ymmärtää.
- (c) $\forall i; 1 \leq i \leq n : \exists j; 1 \leq j \leq n : A[i] \neq A[j]$ _____

 - (d) $1 \leq i \leq n \wedge \forall j; 1 \leq j \leq n \wedge i \neq j : A[j] > A[i]$ _____

Tehtävät jatkuvat paperin toisella puolella.

Esitä kaavana seuraavat taulukosta $A[1 \dots n]$ puhuvat väitteet.

- (e) A :ssa ei ole yhtään kolmosta. _____
- (f) A on keko. (Keossa kukin alkio on vähintään yhtäsuuri kuin sen lapset. $A[1]$:n lapset ovat $A[2]$ ja $A[3]$, $A[2]$:n lapset ovat $A[4]$ ja $A[5]$, $A[3]$:n lapset ovat $A[6]$ ja $A[7]$ ja niin edelleen niin pitkälle kuin taulukkoa riittää.) _____

4. Tässä tehtävässä kaikki muuttujat saavat arvonsa kokonaisluvuista. Kokonaisluku n on jaollinen kokonaisluvulla m , missä $m \neq 0$, jos ja vain jos on olemassa sellainen kokonaisluku k , että $n = km$. Alkuluku tarkoittaa ykköstä suurempaa kokonaislukua, joka ei ole jaollinen muilla positiivisilla kokonaisluvuilla kuin ykkösellä ja itsellään.

- (a) Millä kokonaisluvuilla 15 on jaollinen? _____
 Millä kokonaisluvuilla 0 on jaollinen? _____
- (b) Kirjoita kaava, joka sanoo että p on alkuluku. Älä kirjoita suoraa käännoästä sanallista kuvauksesta, vaan lyhyt ja selkeä samaa tarkoittava kaava.

- (c) Kirjoita yksinkertainen ohjelmanpätkä, joka palauttaa `true` jos ja vain jos kokonaisluku p on alkuluku. Muutoin se palauttaa `false`. Sen ei tarvitse olla tehokas.

5. Eräeseen tietorakenteeseen voidaan lisätä alkio toiminnolla l , lukea erään alkion arvo toiminnolla a , ja poistaa alkio toiminnolla p . Tyhjää tietorakennetta merkitään E . Toiminnot $E.a$ ja $E.p$ on kielletty, ja muut käyttäytyvät seuraavasti (x saa arvonsa alkioista ja X tietorakenteen tiloista):

- (1) $\forall x : E.l(x).a = x$ (4) $\forall X : X \neq E \rightarrow \forall x : X.l(x).a = X.a$
 (2) $\forall x : E.l(x).p = E$ (5) $\forall X : X \neq E \rightarrow \forall x : X.l(x).p = X.p.l(x)$
 (3) $\forall X : \forall x : X.l(x) \neq E$

- (a) Sievennä $E.l(3).l(8).l(1).l(0).a$.

- (b) Sievennä $E.l(3).p.l(8).l(1).p.l(0).a$.

- (c) Perustele $\forall X : \forall x : \forall y : X.l(x).p.l(y) = X.l(x).l(y).p$ tai anna vastaesimerkki.

(de) Olkoon kukin t_i joko p tai muotoa $l(x)$. Perustele, että jokainen $E.t_1.t_2 \dots t_n.a$ voidaan sieventää muotoon, jossa joko esiintyy kielletty toiminto tai ei esiinny p .

- (f) Joko kerro millä nimellä tätä tietorakennetta tavallisesti kutsutaan, tai anna sille itse valitsemasi luonteva nimi. Se saa olla suomeksi tai englanniksi. _____