MATS263 Todennäköisyysteoria 3
Harjoitus 7

Maanantai 28.10.2013

MaD 381, klo 14.15

1. Osoita heikko suurten lukujen laki:
   Olkoot $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ korreloimattomia satunnaismuuttujia (eli $\mathbb{E}X_m X_n = \mathbb{E}X_m \mathbb{E}X_n$ aina, kun $n \neq m$), joille $\mathbb{E}X_n = \mu$ kaikilla n ja
   $$\frac{\sum_{k=1}^{n} Var(X_k)}{n^2} \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$
   Tällöin
   $$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[\mathbb{P}]{} \mu, \text{ kun } n \to \infty.$$

2. Olkoot $X, X_1, X_2, \ldots$ ja $Y_1, Y_2, \ldots$ satunnaismuuttujia, sekä $a \in \mathbb{R}$ siten, että $X_n \xrightarrow[d]{} X$ ja $Y_n \xrightarrow[\mathbb{P}]{} a$. Osoita, että
   (a) $X_n + Y_n \xrightarrow[d]{} X + a$,
   (b) $X_n - Y_n \xrightarrow[d]{} X - a$,
   (c) $X_n \cdot Y_n \xrightarrow[d]{} X \cdot a$, ja
   (d) jos $a \neq 0$, niin $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow[d]{} \frac{X}{a}$,

   kun $n \to \infty$.

3. Olkoot $X, X_1, X_2, \ldots$ ja $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ satunnaismuuttujia siten, että $X_n \xrightarrow[d]{} X$ ja $Y_n \xrightarrow[d]{} Y$.
   (a) Onko totta, että $X_n + Y_n \xrightarrow[d]{} X + Y$?
   (b) Entä, jos oletetaan lisäksi, että X_n ja Y_n ovat riippumattomia kaikilla n?
   (c) ...ja vielä X ja Y ovat riippumattomia?

4. Olkoot X, Y ja Z satunnaismuuttujia siten, että X ja Z ovat riippumattomia, ja myös Y ja Z ovat riippumattomia. Onko totta, että
   (a) jos $X \underset{d}{=} Y$, niin $X + Z \underset{d}{=} Y + Z$;
   (b) jos $X + Z \underset{d}{=} Y + Z$, niin $X \underset{d}{=} Y$?

Vinkki: Tiedetään, että jos karakteristiset funktiot ovat samat, eli $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, niin $X \underset{d}{=} Y$.
Riittäisikö ehto $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ kaikilla $t \in [a, b]$ joillakin $a, b \in \mathbb{R}$?

5. Osoita "Parsevalin yhteys" (*Parseval's relation*):
Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, joiden karakteristiset funktiot ovat φ_X ja φ_Y. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(z) dP_Y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_Y(z) dP_X(z).$$

Laske tämän avulla integraali $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos y}{y^2(1+y^2)} dy$.

6. Mallinnetaan elektronisen osan kestoa (nk. *elinikä*) satunnaismuuttujalla, jonka odotusarvo on $a > 0$ ja varianssi a^2. Tehtävänä on laskea, kuinka monta kappaletta osia tarvitaan, jotta näiden yhteenlaskettu elinikä olisi vähintään 95 % todennäköisyydellä vähintään $8a$. Eri komponenttien eliniät oletetaan riippumattomiksi. Millaisen vastauksen saat

   (a) Markovin / Chebysevin epäyhtälön avulla? Entä

   (b) keskeisen raja-arvolauseen antaman approksimaation avulla?