MATS263 Todennäköisyysteoria 3
Harjoitus 6

Tiistai 22.10.2013

MaD 381, klo 16.00

1. Olkoon X Cauchy-jakautunut satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Laske karakteristinen funktio φ_X.

   Vinkki: Voit tutkia funktiota $g(z) = \frac{itz}{1+z^2}$ kompleksianalyysin keinoin TAI riippumattomien, eksponenttijakautuneiden satunnaismuuttujien erotusta esimerkin 7.19 tapaan.

2. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos $\mathbb{P}(X = a) > 0$, niin

$$\mathbb{P}(X = a) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-ita} \varphi_X(t) dt.$$

3. Olkoot $d > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $X \colon \Omega \to \{kd + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$. Merkitään $p_k = \mathbb{P}(X = kd + \alpha)$, $k \in \mathbb{Z}$. Laske karakteristinen funktio φ_X.

4. Osoita, että $\mathbb{P}(X = a) = 1$ jollakin $a \in \mathbb{R}$, jos ja vain, jos $|\varphi_X(t)| = |\varphi_X(s)| = 1$ joillakin $s, t \in \mathbb{R}$, joille $\frac{s}{t} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5. Osoita, että $\mathbb{P}(X \in \{kd + \alpha, k \in \mathbb{Z}) = 1$ joillakin $d > 0$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$, jos ja vain, jos φ_X on jaksollinen eli on olemassa $\beta \in \mathbb{R}$ siten, että $\varphi_X(t + n\beta) = \varphi_X(t)$ kaikilla kokonaisluvuilla n (ja kaikilla $t \in \mathbb{R}$).

6. (a) Osoita nk. konvoluutiokaava: Jos X ja Y ovat riippumattomia ja (jakaumiltaan) absoluuttisesti jatkuvia, niin summan $X + Y$ tiheysfunktio on

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a - y) f_Y(y) dy,$$

   missä f_X (f_Y) on satunnaismuuttujan X (Y) tiheysfunktio. Millaise(n/t) kaava(n/t) saat, jos jompi kumpi (tai kumpikaan) jakaumista ei ole absoluuttisesti jatkuva?

   (b) Olkoot X ja Y riippumattomia reaaliarvoisia satunnaismuuttujia. Osoita, että

   i. jos X on (jakaumaltaan) absoluuttisesti jatkuva, niin myös summa $X + Y$ on;

   ii. jos molemmat ovat diskreetisti jakautuneita, niin samoin on summa; sekä

   iii. jos toinen on diskreetisti jakautunut, mutta toisen jakauma on jatkuva ja singulaarinen, niin summan jakauma on jatkuva ja singulaarinen.