MATS263 Todennäköisyysteoria 3
Harjoitus 5

Tiistai 15.10.2013

MaD 381, klo 16.00

1. Osoita, että integroituvalle kompleksiarvoiselle satunnaismuuttujalle $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ on

   (a) $\mathbb{E}(aZ) = a\mathbb{E}Z$ kaikilla $a \in \mathbb{C}$, ja

   (b) $|\mathbb{E}Z| \leq \mathbb{E}|Z|$.

2. Olkoon $X : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja ja φ sen karakteristinen funktio. Osoita, että kuvaus $t \mapsto \varphi(t)$ on tasaisesti jatkuva.

   Vinkki: Arviosta $|e^{iy} - 1| \leq |y|$ voi olla apua.

3. Laske karakteristinen funktio φ_X, kun

   (a) X on tasaisesti jakautunut välillä $[0, 1]$,

   (b) $\mathbb{P}(X = 1) = p$ ja $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ jollakin $0 < p < 1$.

4. Olkoot $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia. Osoita, että X ja Y ovat riippumattomia, jos ja vain, jos $\varphi_{X,Y}(t, u) = \varphi_X(t)\varphi_Y(u)$ kaikilla $t, u \in \mathbb{R}$.

   Vinkki: Huomautus 7.11

5. Olkoot $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ riippumattomia, samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Osoita, että $X - Y$ on symmetrisesti jakautunut (eli $X - Y =_d Y - X$.

6. Osoita lause 7.13: Jos $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_X(t)|dt < \infty$, niin X on absoluuttisesti jatkuva ja sillä on tiheysfunktio

$$f_X(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ity} \varphi_X(t)dt,$$

   joka on jatkuva ja rajoitettu.

7.* *Lisätehtävä:*

   Osoita lemma 7.10:

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \pi sgn(\alpha),$$

   missä

$$sgn(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ jos } \alpha > 0 \\ -1, \text{ jos } \alpha < 0 \\ 0, \text{ jos } \alpha = 0 \end{cases} .$$

   Vinkki: Kokeile vaikkapa esitystä $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} dy$,

   Fubinin lausetta ja osittaisintegrointia kahdesti sisemmälle integraalille.