MATS263 Todennäköisyysteoria 3
Harjoitus 4

Tiistai 8.10.2013

MaD 381, klo 16.00

1. Olkoon $X \geq 0$ satunnaismuuttuja, F sen kertymäfunktio ja $r > 0$. Osoita, että

   (a) $\mathbb{E}X = \int_0^\infty (1 - F(y))\, dy = \int_0^\infty \mathbb{P}\,(X > y)\, dy$ ja

   (b) $\mathbb{E}X^r = r \int_0^\infty y^{r-1} (1 - F(y))\, dy = r \int_0^\infty y^{r-1} \mathbb{P}\,(X > y)\, dy$,

   missä yhtälöiden molemmat puolet voivat olla äärettömiä.

   Vinkki: Voit käyttää Fubinin lauseesta seuraavaa "osittaisintegrointikaavaa": jos F ja G ovat oikealta jatkuvia, kasvavia funktioita, joilla ei ole yhteisiä epäjatkuvuuspisteitä, niin $\int_a^b G(x)dF(x) = G(b)F(b) - G(a)F(a) - \int_a^b F(x)dG(x)$. Integrointi "$dF(x)$" tarkoittaa integrointia mitan $P(]a,b]) := F(b) - F(a)$ suhteen.

2. Olkoon $X \geq 0$ satunnaismuuttuja.

   (a) Osoita, että

   $$\mathbb{E}X < \infty, \text{ jos ja vain, jos } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\,(X \geq n) > \infty$$

   näyttämällä, että

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\,(X \geq n) \leq \mathbb{E}X \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\,(X \geq n)\,.$$

   (b) Osoita, että jos X saa vain kokonaislukuarvoja, niin $\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$.

3. (a) Olkoon X satunnaismuuttuja ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kasvava funktio, jolle $g(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $\mathbb{E}g(|X|) < \infty$. Osoita, että

   $$\mathbb{P}(|X| > y) \leq \frac{\mathbb{E}g(|X|)}{g(y)} \text{ kaikilla } y > 0, \text{ joilla } g(y) > 0.$$

   (b) Miten tämä auttaa sinua arvioimaan jakaumien häntiä momenttien avulla?

4. (*Pareto-jakauma*)
   Olkoot $\alpha, \beta, r > 0$ sekä $F(y) = 1 - (\frac{\beta}{y})^\alpha$, kun $y \geq \beta$ ja nolla muualla. Osoita, että

   (a) F on (jonkin satunnaismuuttujan X) kertymäfunktio;

(b) satunnaismuuttujalla X on tiheysfunktio

$$f(y) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{y^{\alpha+1}}\chi_{]\beta,\infty[}(y);$$

(c) $\mathbb{E}X = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$, jos $\alpha > 1$, muutoin ääretön;

(d) $VarX = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$, jos $\alpha > 2$, muutoin ääretön;

(e) $\mathbb{E}X^r = \frac{\alpha\beta^r}{(\alpha-r)}$, jos $\alpha > r$, muutoin ääretön; ja

(f) $\log\left(\frac{X}{\beta}\right) \sim Exp(\alpha)$.

5.-6. (*Cauchy-jakauma*)
Olkoot $a \in \mathbb{R}$ ja $\beta > 0$ sekä

$$f(x) = (\pi\beta(1 + (\tfrac{x-a}{\beta})^2))^{-1}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että

(a) f on (jonkin satunnaismuuttujan X) tiheysfunktio;

(b) satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on

$$F(x) = \pi^{-1}\arctan(\tfrac{x-a}{\beta}) + \tfrac{1}{2}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$;

(c) satunnaismuuttujalla $Y := \frac{X-a}{\beta}$ on tiheysfunktio

$$f_Y(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$;

(d) $\mathbb{E}|Y| = \infty$;

(e) $\mathbb{E}Y$ ei ole määritelty; sekä

(f) $\mathbb{E}Y^2 = \infty$.

7.* *Lisätehtävä (kertausta kurssilta Analyysi 2):*
Osoita, että

$$\int_0^1 |\log x| dx < \infty.$$

Entä $\int_0^1 (\log x)^2 dx$?

(Ks. momenttiongelma ja siihen liittyvät välttämättömät ehdot logaritmisen normaalijakauman tapauksessa.)