MATS263 Todennäköisyysteoria 3
Harjoitus 3

Tiistai 1.10.2013

MaD 381, klo 16.00

1. Anna esimerkki satunnaismuuttujien jonosta, joka suppenee stokastisesti, mutta ei ole tasaisesti integroituva.

2. (a) Osoita, että X on integroituva (eli $X \in L_1$), jos ja vain, jos
$$\lim_{c\to\infty} \mathbb{E}\left[|X|\chi_{\{|X|>c\}}\right] = 0.$$
   (b) Olkoot $X \in L_1$ ja joukot $A_n \in \mathcal{F}$ s.e. $\mathbb{P}(A_n) \to 0$, kun $n \to \infty$. Osoita, että $\mathbb{E}\left(|X|\chi_{A_n}\right) \to 0$, kun $n \to \infty$.

3. Osoita lause 4.7: integroituvien satunnaismuuttujien jono $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ on tasaisesti integroituva, jos ja vain, jos
$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|\chi_{|X_n|>c} \to 0, \text{ kun } c \to \infty.$$

4. Olkoot $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ tasaisesti integroituvia. Osoita, että $(X_n + Y_n)_{n=1}^{\infty}$ on tasaisesti integroituva.

5. Olkoot $p, q > 1$ siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ja olkoot $(|X_n|^p)_{n=1}^{\infty}$ ja $(|Y_n|^q)_{n=1}^{\infty}$ tasaisesti integroituvia. Osoita, että $(X_n Y_n)_{n=1}^{\infty}$ on tasaisesti integroituva.

6. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Osoita, että jos $X_n \to X$ jakaumamielessä, niin $f(X_n) \to f(X)$ jakaumamielessä.

   Lisäkysymys: riittäisikö olettaa, että $\mathbb{P}(X \in D) = 0$, missä D on funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukko, ja f on mitallinen funktio?